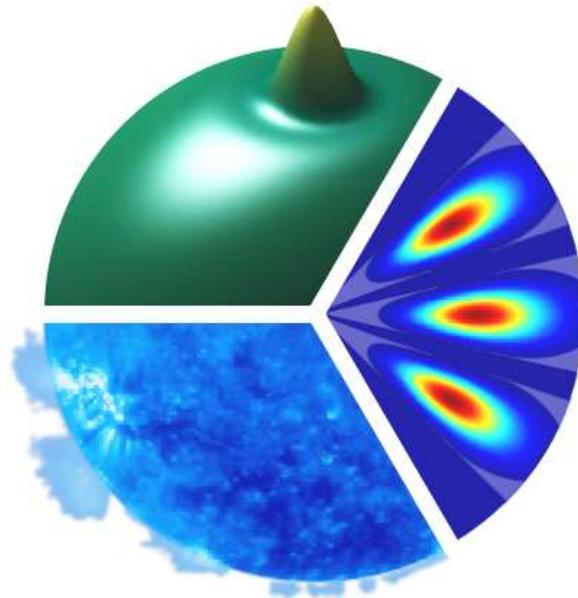


Université catholique de Louvain



Faculté des Sciences

# Ondelettes, repères et couronne solaire



Dissertation présentée par

**Laurent JACQUES**

En vue de l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

Groupe : Sciences Physiques

Promoteur : *Prof. Jean-Pierre Antoine*

Louvain-la-Neuve – Juin 2004



# Remerciements

J'exprime premièrement ma profonde gratitude à mon promoteur, le Professeur Jean-Pierre Antoine de l'Institut de Physique Théorique de l'Université catholique de Louvain (FYMA/UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique), pour ses six années d'encadrement. Je le remercie pour le rôle délicat de guide qu'il a su accomplir tout au long de ma thèse, pour le partage sans limite de son expérience, ainsi que pour sa patience.

Merci à Jean-François Hochedez, Chercheur à l'Observatoire Royal de Belgique (SOL/-ROB, Bruxelles), pour m'avoir fait découvrir et aimer ce magnifique objet physique qu'est la couronne solaire, et ce, dès le début de notre collaboration entreprise en 1999. Merci également à F. Clette, S. Gissot, D. Berghmans, E. Verwichte, A. Zhukov, et à toute l'équipe solaire du ROB pour les multiples discussions et les réunions réalisées dans ce cadre.

Je remercie vivement Pierre Vandergheynst, Professeur à l'Institut de Traitement du Signal à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (ITS/EPFL, Suisse), pour nos précieuses et nombreuses interactions dans le vaste domaine de l'analyse par ondelettes et de ses généralisations. Je profite également de cette occasion pour le remercier de m'avoir invité à trois reprises dans son institut. Merci aussi à Oscar, Rosa, Iva, et au reste de l'équipe du ITS pour leur chaleureux accueil à chacun de mes séjours.

Je remercie également Benoît Macq, Professeur du Laboratoire de Télécommunications et Télédétection de l'Université catholique de Louvain (TELE/UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique), et les membres de l'unité TELE pour nos nombreux séminaires T.I.P.<sup>1</sup> organisés conjointement avec FYMA. Ceux-ci furent pour moi l'occasion d'échanger des points de vues complémentaires sur des problèmes particuliers de traitement d'images.

Je tiens à remercier Bruno Torrèsani, Professeur au Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités (LATP/CMI, Université de Provence, France), pour l'organisation et la création du réseau européen HASSIP<sup>2</sup>. Via sa conférence initiale et son école doctorale, ce réseau m'a permis de dialoguer avec de nombreux scientifiques affirmés et de parfaire ma connaissance en analyse non linéaire de signaux.

Mes remerciements vont également aux membres de mon jury de thèse, à savoir Ghislain Grégoire, Jean-François Hochedez, Benoît Macq, Philippe Ruelle, Bruno Torrèsani et Pierre Vandergheynst pour l'attention qu'ils accorderont à ce document. Je remercie également G. Grégoire et P. Ruelle pour avoir accepté respectivement les rôles de président et de

---

<sup>1</sup>*Tuesdays/Thursdays of Image Processing.*

<sup>2</sup>*Harmonic Analysis and Statistics for Signal and Image Processing.*

secrétaire dans ce jury.

Je remercie le FRIA<sup>3</sup> pour le financement de mes deux premières années de thèse.

J'adresse mes remerciements à Alain Coron, Marcela Morvidone, Jean Bricmont, Luc Haine, Jean-Pierre Gazeau et Jan Govaerts pour leur écoute et leurs explications face aux problèmes scientifiques ponctuels que je leur soumettais.

Merci également aux personnes membres (ou anciennement membres) de l'unité FYMA, de l'unité FYNU et du département de Physique pour leur amabilité et pour les conviviaux repas de midi à la cafétéria du Cyclotron. Merci donc à Attilio, Yebeni, Lionel, Ferdinand, Roland, Laurent, Christopher, Martin, Yves, Stéphanie, Geoffrey, Manoël, Olivier, Cathy, Bruna, ... et les autres que j'oublie malheureusement de citer ici. Raoul, merci pour ton aide précieuse lors des journées difficiles d'un administrateur système.

Je tiens à remercier ici mes parents et mon grand-père Paul pour leur soutien sans faille et pour l'éveil scientifique qu'ils ont suscité en moi durant mon éducation. Merci aussi à mes beaux-parents pour leur présence.

Mes remerciements finaux iront à ma compagne Laurence qui, par ses conseils et ses encouragements permanents, m'a donné la force morale nécessaire à l'accomplissement de ces six années de recherche. Cette période aura aussi vu la réalisation de notre plus belle réussite ... Arthur.

---

<sup>3</sup>Fonds pour la formation à la Recherche dans l'Industrie et dans l'Agriculture.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Représentations fréquentielles</b>	<b>7</b>
1.1 Représentations fréquentielles de signaux . . . . .	7
1.1.1 Notions d'analyse . . . . .	7
1.1.2 Transformée de Fourier . . . . .	9
1.1.3 Discrétisation . . . . .	11
1.1.4 Implémentation . . . . .	13
1.2 Extension à $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	14
1.3 Extension à $L^2(S^2)$ . . . . .	16
1.3.1 Transformée de Fourier sur $L^2(S^2)$ . . . . .	16
1.3.2 Théorème de corrélation . . . . .	17
1.3.3 Echantillonnage et règle de quadrature . . . . .	18
<b>2 Analyse continue en ondelettes</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	21
2.2.1 Principe . . . . .	21
2.2.2 Définition . . . . .	23
2.2.3 Redondance et noyau reproduisant . . . . .	24
2.2.4 Covariance . . . . .	25
2.2.5 Localisation et interprétation . . . . .	26
2.2.6 Conditions sur $\psi$ . . . . .	27
2.2.7 Exemples d'ondelettes . . . . .	28
2.2.8 Implémentation . . . . .	28
2.3 Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	29
2.3.1 Définition . . . . .	29

2.3.2	Propriétés . . . . .	32
2.3.3	Conditions sur $\psi$ . . . . .	32
2.3.4	Ondelettes isotropes, directionnelles et endstopped . . . . .	33
2.3.5	Implémentation . . . . .	34
2.4	Transformée continue en ondelettes sur la sphère . . . . .	35
2.4.1	Introduction . . . . .	35
2.4.2	Principes . . . . .	35
2.4.3	Ondelettes sphériques . . . . .	36
2.4.4	Définition et propriétés de la SCWT . . . . .	38
2.4.5	Reconstruction . . . . .	38
2.4.6	Implémentation $\square$ . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Ondelettes, régularité et rayon de courbure</b>	<b>47</b>
3.1	Analyse de régularité Höldérienne . . . . .	47
3.1.1	Régularité sur la droite . . . . .	47
3.1.2	Régularité isotrope sur le plan . . . . .	51
3.1.3	Régularité directionnelle sur le plan $\square$ . . . . .	53
3.2	Estimation de rayon de courbure $\square$ . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Repères d'ondelettes</b>	<b>63</b>
4.1	Généralités . . . . .	63
4.1.1	Repères et opérateurs . . . . .	63
4.1.2	Inversion . . . . .	65
4.1.3	Algorithmes . . . . .	66
4.1.4	Repères continus et semi-continus . . . . .	67
4.1.5	Repères contrôlés $\square$ . . . . .	67
4.2	Repères d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	71
4.3	Repères semi-continus d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	72
4.3.1	Définitions . . . . .	73
4.3.2	Implémentation et discrétisation . . . . .	75
4.3.3	Exemple de repère conique strict $\square$ . . . . .	76
4.3.4	Application au débruitage d'images $\square$ . . . . .	78
4.3.5	Conclusion . . . . .	85
4.4	Repères d'ondelettes multisélectifs sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ $\square$ . . . . .	85
4.4.1	Point de vue continu $\square$ . . . . .	86
4.4.2	Analyse multirésolution biorthogonale sur $C_1$ . . . . .	87

4.4.3	Analyse angulaire multisélective $\square$ . . . . .	91
4.4.4	Règles de récurrence $\square$ . . . . .	93
4.4.5	Sélectivité adaptative $\square$ . . . . .	95
4.4.6	Choix de l'ondelette $\square$ . . . . .	96
4.4.7	Implémentation et discrétisation $\square$ . . . . .	98
4.4.8	Approximation non-linéaire $\square$ . . . . .	101
4.4.9	Conclusions et perspectives . . . . .	105
4.5	Repères d'ondelettes stéréographiques sur $L^2(S^2)$ $\square$ . . . . .	106
4.5.1	Introduction . . . . .	106
4.5.2	Repère sphérique semi-continu $\square$ . . . . .	107
4.5.3	Repère sphérique discret $\square$ . . . . .	115
4.5.4	Conclusions et perspectives . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Des ondelettes sur la couronne solaire</b> . . . . .	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Notions de physique solaire . . . . .	124
5.2.1	Caractéristiques générales . . . . .	124
5.2.2	Structure globale . . . . .	124
5.2.3	Le cycle solaire . . . . .	125
5.3	L'expérience SoHO/EIT . . . . .	126
5.3.1	Présentation . . . . .	126
5.3.2	Acquisition des images . . . . .	128
5.3.3	Conventions . . . . .	129
5.3.4	Objectifs . . . . .	129
5.3.5	La couronne solaire vue par EIT . . . . .	130
5.3.6	Réponse lumineuse des phénomènes coronaux . . . . .	132
5.3.7	Estimation du niveau de bruit . . . . .	132
5.4	Sur la trace des rayons cosmiques $\square$ . . . . .	133
5.4.1	Caractérisation et algorithme $\square$ . . . . .	135
5.4.2	Résultats $\square$ . . . . .	137
5.5	Détection de Points Brillants $\square$ . . . . .	140
5.5.1	Approche continue $\square$ . . . . .	140
5.5.2	Approche discrète $\square$ . . . . .	148
5.6	Conclusions et perspectives . . . . .	155

<b>A</b>	<b>Démonstrations</b>	<b>159</b>
A.1	Chapitre 1 : Représentations fréquentielles . . . . .	159
A.2	Chapitre 2 : Analyse continue en ondelettes . . . . .	160
A.3	Chapitre 3 : Ondelettes, régularité et rayon de courbure . . . . .	162
A.4	Chapitre 4 : Repères d'ondelettes . . . . .	168
<b>B</b>	<b>Transformée en ondelettes discrète</b>	<b>183</b>
B.1	Analyse multirésolution . . . . .	183
B.2	Schéma orthogonal . . . . .	185
B.3	Schéma biorthogonal . . . . .	187
B.4	Exemples de bases d'ondelettes . . . . .	189
<b>C</b>	<b>La toolbox YAWTb : Yet Another Wavelet Toolbox <math>\square</math></b>	<b>193</b>
C.1	Historique . . . . .	193
C.2	Description . . . . .	194
C.3	Liens . . . . .	194

# Table des figures

2.1	Localisation spatiale d'une ondelette . . . . .	26
2.2	Représentation visuelle de la dilatation stéréographique. . . . .	36
2.3	L'ondelette DOG pour $\alpha = 1.25$ dilatée de $a = 0.1$ . . . . .	37
2.4	Analyse d'une cartographie du ciel obtenue par le satellite Hipparcos pour la mission Tycho [Hip]. (a) Image originale (nombre d'étoiles $> 10^6$ ). (b) $W_f(\omega, 0.08)$ . (c) $W_f(\omega, 0.04)$ . (d) $W_f(\omega, 0.02)$ . . . . .	40
2.5	Comportement de $\hat{\psi}_a(l, 0)$ en fonction de l'échelle $a$ . Pour $a = 0.01$ , l'ondelette $\psi_a$ possède une largeur de bande supérieure à celle permise par une grille $512 \times 512$ ( $B = 256$ ). . . . .	41
2.6	$\dot{l}_M(a)$ en fonction de l'échelle $a$ (en représentation logarithmique). . . . .	43
3.1	Analyse d'une singularité d'ordre $\alpha$ . (a) La fonction modélisant une singularité d'ordre $\alpha = 0.5, 1$ et $1.5$ en l'origine. (b) Le comportement en échelles des coefficients en ondelettes $W_f(0, a)$ en représentation log-log. Les valeurs estimées de l'exposant de Hölder figurent au milieu des courbes. . . . .	50
3.2	Analyse d'une singularité d'ordre $\alpha$ . (a) La fonction modélisant une singularité d'ordre $\alpha = \sqrt{2}$ sur la droite $x = 0$ . (b) Le comportement en échelles des coefficients en ondelettes $W_f(\vec{0}, a)$ en représentation log-log. La valeur estimée de l'exposant de Hölder est indiquée sur la courbe. . . . .	52
3.3	Singularité directionnelle en l'origine d'ordre $\alpha(\chi) = 1 + \sin(2\chi)^2$ où $\chi = \arg \vec{x}$ . (a) La fonction test. (b) Estimation de l'exposant de Hölder directionnel pour différentes valeurs de $\epsilon$ . La courbe continue représente la valeur théorique $\alpha(\theta)$ . (c) Estimation de l'exposant de Hölder pour $\epsilon = 0.5$ . Les barres d'erreur correspondent à la déviation standard des pentes de $\log  W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta) $ entre $a_m$ et $a_M$ . La courbe discontinue représente la valeur théorique $\alpha(\theta)$ . . . . .	56

3.4	Estimation de l'exposant $h_f(\vec{0}, \theta)$ sur base de la décroissance de $\log  W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta) $ avec $\epsilon(a) = \lambda a^2$ . Les échelles sont prises dans l'intervalle $[5, 20]$ et $\lambda = \frac{1}{50}$ . La courbe théorique $\alpha(\theta)$ est affichée en trait discontinu. . . . .	57
3.5	Analyse d'une droite avec l'ondelette de Morlet. ( $k_0 = 6, \sigma = 1$ ). Réponse angulaire des $ W_d ^2$ en l'origine et pour $a = 3$ . . . . .	59
3.6	Explication graphique du comportement angulaire des coefficients en ondelettes en un point d'un cercle de rayon $R$ . . . . .	60
3.7	Réponse angulaire des $ W_c ^2$ sur le bord d'un cercle pour différentes échelles et différents rayons. (a) Variation de la réponse en fonction de l'échelle. (b) Réponse en fonction du rayon (en pixels). . . . .	60
4.1	Repère conique CMW pour $N = 6$ orientations ( $p = 0, q = 1$ ). (a) $\hat{\psi}(\vec{k})$ . (b) $\hat{\psi}(r_1^{-1}\vec{k})$ . (c) $[\hat{\psi}^2(\vec{k}) + \hat{\psi}^2(r_1^{-1}\vec{k})]^{\frac{1}{2}}$ . . . . .	78
4.2	Débruitages de l'image de Lenna. (a) Image originale. (b) Image bruitée (PSNR=22.13 dB). (c) Débruitage avec un filtrage de Wiener idéal (30.81). (d) Débruitage par transformée en ondelettes discrètes non décimée (Symmlet 4, PSNR=27.44 dB). (e) Débruitage par Curvelet [SCD02] (PSNR=31.95 dB). (f) Débruitage avec un repère conique CMW ( $J = 5, N = 16, p = 0, q = 1$ , PSNR=32.02 dB). . . . .	82
4.3	Zoom sur les différents débruitages de l'image de Lenna. (a) Zoom sur l'image originale. (b) Débruitage par transformée en ondelettes discrètes non décimée (Symmlet 4, PSNR=27.44 dB). (c) Débruitage par Curvelet [SCD02] (PSNR=31.95 dB). (d) Débruitage avec un repère conique CMW ( $J = 5, N = 16, p = 0, q = 1$ , PSNR=32.02 dB). . . . .	83
4.4	Décomposition des coefficients en ondelettes selon leur niveau de sélectivité.	94
4.5	Reconstruction des coefficients en ondelettes selon leur niveau de sélectivité.	94
4.6	Valeur de $\tilde{l}(\vec{x}, 0)$ sur un exemple académique avec $L = 5$ . . . . .	96
4.7	Présentation des ondelettes $\hat{\psi}_{l,n}^a(\vec{k})$ et $\hat{\psi}_{l,n}^d(\vec{k})$ pour différentes valeurs de $l$ . . . . .	97
4.8	Comparaison de la sélectivité angulaire de deux ondelettes du repère ASF. (a) $\hat{\psi}_{3,0}^a(\vec{k})$ ( $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ ). (b) $\hat{\psi}_{4,0}^a(\vec{k})$ ( $\alpha = \frac{3\pi}{16}$ ). . . . .	97
4.9	Décomposition d'une image académique en ses coefficients en ondelettes à différents niveaux de sélectivité. . . . .	100
4.10	Approximation non-linéaire d'une image académique à 1% et 10% des meilleurs coefficients pour $L = 4$ et $J = 4$ . (a) ASF fixe à 1%. (b) ASF adaptatif à 1%. (c) ASF fixe à 10%. (d) ASF adaptatif à 10%. . . . .	103
4.11	Photographie d'un champ de tournesols. . . . .	103

4.12	Approximations non-linéaires d'une photographie d'un champ de tournesols. Les Figures (a), (b) et (c) présentent les approximations non-linéaires réalisées avec 1% des meilleurs coefficients respectivement pour les repères CMW (PSNR=14.03 dB), ASF fixe (PSNR=13.84 dB) et ASF adaptatif (PSNR=14.27 dB). Les Figures (d), (e) et (f) sont équivalentes aux Figures (a), (b) et (c) mais avec 10% des coefficients. Les qualités des reconstructions obtenues sont respectivement égales à 17.02 dB, 16.72 dB et 18.22 dB. . . .	104
4.13	Analyse d'un repère sphérique semi-continu. Comportement de $S(l)$ pour plusieurs valeurs de $K$ . . . . .	108
4.14	Analyse d'un repère sphérique semi-continu contrôlé. Comportement de $S(l)$ pour plusieurs valeurs de $K$ . . . . .	110
4.15	Décomposition de l'image de Jupiter. (a) Image originale. (b) Approximation basse fréquence $S$ . (c) $W_1(\omega)$ . (d) $W_4(\omega)$ . (e) $H(\omega)$ . . . . .	112
4.16	Augmentation des détails sur la <i>tache rouge</i> de Jupiter. (a) Image originale. (b) Masque appliqué à $W_6$ et à $H$ . (c) Zoom sur la tache. (d) Zoom sur la tache plus détaillée. . . . .	114
4.17	Décomposition d'une mappemonde par un repère d'ondelettes DOG. (a) Image originale (grille $256 \times 256$ , bande passante $\beta = 128$ ). (b) $W_0[p, q]$ . (c) $W_2[p, q]$ . (d) $W_4[p, q]$ . . . . .	119
4.18	Reconstruction d'une mappemonde par un repère d'ondelette DOG. (a) Image originale. (b) Reconstruction. (c) Différences entre l'image originale et la reconstruction. (d) Différences entre l'image originale et la reconstruction $f^{(3)}$ obtenue par la méthode du gradient conjugué après 3 itérations. . . . .	120
5.1	Le télescope EIT embarqué à bord du satellite SoHO au coté de 12 autres instruments scientifiques. . . . .	126
5.2	Quatre images enregistrées par le télescope EIT. (a) 304 Å. (b) 171 Å. (c) 195 Å. (d) 284 Å. Les couleurs sont purement conventionnelles. . . . .	127
5.3	Estimation du niveau de bruit d'une image EIT (171 Å) $1024 \times 1024$ . (a) Image originale. (b) Niveau de bruit en DN estimé à partir de (5.5) pour $L = 1$ . . . . .	133
5.4	Traces cosmiques sur deux images EIT 284 Å. En haut, exemples de traces cosmiques. A droite, quelques traces cosmiques sont pointées sur un zoom de l'image de gauche. En bas, un exemple de trait cosmique. . . . .	134

5.5	Détection et suppression de traces cosmiques sur une image EIT 284 Å. (a) Image originale. Les contrastes ont volontairement été augmentés avec une égalisation d'histogramme. (b) Zoom sur cette image. (c) Traces cosmiques détectées. En noir, les points de $\Sigma_\kappa(I)$ pour $\kappa_p = 2$ . (d) Image nettoyée. . .	138
5.6	Comparaison entre un $\sigma$ -seuillage classique et $\Sigma_\kappa(I)$ . (a) Zoom sur l'image originale. (b) Les points gris et noirs sont détectés par un $\sigma$ -seuillage classique ( $\kappa_0 = 2$ ). Les points noirs appartiennent à $\Sigma_\kappa(I)$ avec $\kappa_p = 2$ . . . . .	139
5.7	Nettoyage de traces cosmiques sur plusieurs itérations. (a) Image originale. (b) Résultat après 1 itération. (c) Résultat après 3 itérations. . . . .	139
5.8	(a) Répartition aléatoire de gaussiennes de différentes largeurs prises aléatoirement dans l'intervalle $[4, 10]$ . L'image a une taille $256 \times 256$ et contient 58 gaussiennes de hauteur $u = 1$ . La hauteur du fond est $h = 1$ . (b) La même image avec sur-impression de cercles localisés sur les centres $\vec{x}_k$ de rayon égal à $\tau_k$ . . . . .	144
5.9	Formation de lignes de maxima. . . . .	145
5.10	Détection des gaussiennes avec une ondelette DOG. (a) Les cercles sont centrés sur les $\vec{p}_k$ (approche ponctuelle) et ont pour rayon $\tilde{\tau}_k$ . (b) La même image avec des cercles localisés sur $\vec{b}_k(a_k)$ (approche ensembliste). . . . .	145
5.11	Image 195 Å du 27/01/1996 en représentation logarithmique. . . . .	146
5.12	Détection des BPs sur base des lignes de maxima. (a) Zoom sur l'image de la Figure 5.11. (b) Résultat de la détection (méthode ensembliste). . . . .	147
5.13	Formation des zones, des tubes de maxima et des arbres dans l'espace multi-échelle . . . . .	150
5.14	(a) Assemblage de gaussiennes de tailles $\tau_A = 5$ et $\tau_B = 10$ . (b) Extraction des gaussiennes de taille $\tau_A$ . . . . .	153
5.15	(a) Assemblage de gaussiennes de tailles $\tau_A = 5$ et $\tau_2 = 10$ bruité par un bruit blanc gaussien (PSNR=22.43 dB). (b) Extraction des gaussiennes de taille $\tau_A$ . . . . .	153
5.16	(a) Image originale. (b) BPs détectés sur la couronne calme. . . . .	156
5.17	(a) Zoom sur l'image originale. (b) Zoom sur les BPs détectés. (c) Suppression de tous les BPs avec une anisotropie supérieure à 2. . . . .	157
5.18	Sélection d'un BP. (a) Zoom sur l'image originale. (b) Sélection du BP central. . . . .	158
B.1	Ondelettes et fonctions d'échelles directes et duales pour la base biorthogonale de Cohen-Daubechies-Feauveau ( $p = 3, \tilde{p} = 7$ ). (a) $\phi$ . (b) $\tilde{\phi}$ . (c) $\chi$ . (d) $\tilde{\chi}$ . . . . .	191

# Liste des tableaux

4.1	Comparaison de plusieurs méthodes de débruitage d'images sur l'exemple de Lenna bruité. . . . .	84
4.2	Comparaison des PSNR atteints lors du débruitage de l'image de Lenna avec un repère CMW ( $J = 4$ , $N = 8$ ) pour différentes valeurs de $p$ et de $q$ . . . .	85
4.3	Approximation non-linéaire d'une image académique pour les repères ASF fixe et adaptatif. Les résultats sont les PSNR des images reconstruites relativement à l'image originale en utilisant 1% et 10% des meilleurs coefficients en terme de magnitude. . . . .	102
4.4	Estimation des bornes $A$ et $B$ en fonction des extrema de $S(l)$ pour plusieurs valeurs de $K$ . . . . .	109
4.5	Estimation des bornes $A$ et $B$ en fonction des extrema de $S(l)$ pour plusieurs valeurs de $K$ . . . . .	111
4.6	Evaluation de $K_0$ , $K_1$ et $\delta$ sur des fonctions $f \in L^2(S^2)$ de bande passante égal à 128. . . . .	117
5.1	Dates et numéros des maxima de chaque cycle solaire depuis le début de leur enregistrement en 1761. . . . .	126
5.2	Relation entre longueur d'onde, raie(s) d'émission, température, région solaire et couleur (conventionnelle) des images EIT. . . . .	128
5.3	Le nombre de photons par DN en fonction de la longueur d'onde. . . . .	129
5.4	Nombres d'images enregistrées par longueur d'onde depuis 1996 (jusqu'en 2001). FF : <i>Full field of view</i> (45' par 45'). FR : <i>Full Resolution</i> (1024×1024 pixels). HR : <i>Half Resolution</i> (512×512 pixels) [HCV00]. . . . .	129
5.5	Réponse théorique de EIT à différents phénomènes solaires à 195 Å. <sup>(+)</sup> Valeur observée dans [Ma97]. <sup>(*)</sup> Valeur observée dans [ZKW01]. <sup>(§)</sup> Valeur employée dans [NHK03]. . . . .	132

B.1 Filtres direct et dual de Cohen-Daubechies-Feauveau associés respectivement à $p = 3$ et $p = 7$ moments nuls. . . . .	190
--	-----

# Conventions

## Symboles et notations :

Rappels des notations principales employées au sein de ce document (à replacer dans le contexte où elles apparaissent) :

- p.p. : presque partout.
- ssi : si et seulement si.
- $\equiv$  : équivalence entre notations.
- $\text{sinc}(t) : \frac{\sin t}{t}$ , sinus cardinal.
- $\mathbb{R}/\mathbb{N}$  : l'ensemble des irrationnels non entiers.
- $\mathbb{N}^0$  :  $\mathbb{N} / \{0\}$ .
- $\mathfrak{H}$  : espace de Hilbert.
- $\langle f | g \rangle$  : produit scalaire<sup>1</sup> entre  $f$  et  $g$ .
- $\|f\| = \langle f | f \rangle^{\frac{1}{2}}$  : norme<sup>1</sup>  $L^2$  de  $f$ .
- $\|f\|_1$  : norme<sup>1</sup>  $L^1$  de  $f$ .
- $\|f\|_\infty$  : norme<sup>1</sup>  $L^\infty$  de  $f$ .
- $\|\vec{v}\| = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$  : norme Euclidienne de  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .
- $S_1 \simeq [0, 2\pi[$  : le cercle.
- $C_1 \simeq [0, 1[$  : le cercle paramétrisé sur  $[0, 1[$ .
- $S^2$  : sphère à deux dimensions dans  $\mathbb{R}^3$ .
- $r_\theta$  : matrice de rotation dans  $SO(2)$  d'angle  $\theta \in S_1$ .
- $\mathcal{F} \cdot f = \hat{f}$  : transformée de Fourier<sup>1</sup> d'une fonction  $f$ .
- $f * g$  ou  $f \otimes g$  : convolution<sup>1</sup> de  $f$  par  $g$ .
- $f \star g$  ou  $f \star g$  : corrélation<sup>1</sup> de  $f$  par  $g$ .
- $\text{med } v_n$  : médiane du vecteur  $v_n$ .
- $\lfloor \alpha \rfloor$  : le plus grand entier inférieur à  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\lceil \alpha \rceil$  : le plus petit entier supérieur à  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $f^{(n)}(x)$  : la  $n^{\text{ième}}$  dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ .
- $\langle f \rangle = \langle f | 1 \rangle$  : la *moyenne*<sup>1</sup> de la fonction  $f$ .
- $B(\vec{u}, R)$  : la boule centrée sur  $\vec{u}$  de rayon  $R > 0$ .

---

<sup>1</sup>Dépend de l'espace considéré.

- $\mathbb{1}_A(\vec{x})$  : la fonction *indicatrice* de l'ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  qui prend la valeur 1 sur  $A$  et 0 ailleurs.  
 $\mathcal{N}$  : L'espace de Fourier sur  $S^2$  :  $\mathcal{N} = \{(l, m) : l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l\}$ .  
 $\mathcal{N}_b$  :  $\mathcal{N} = \{(l, m) \in \mathcal{N} : l < b\}$  pour  $b \in \mathbb{N}$ .  
 $\mathbb{Z}[N]$  : L'ensemble des  $N \in \mathbb{N}$  premiers entiers  $\{0, \dots, N - 1\}$ .  
 $\text{supp } f$  : Support de la fonction  $f$ .  
 $\text{ess sup } f$  : Support essentiel (voire numérique) de la fonction  $f$ .  
 $\mathcal{B}_{(\cdot)}$  : ensemble des fonctions à bande limitée<sup>1</sup>.

### Unités :

- DN : digital number.  
 px : pixel.  
 $\text{\AA}$  : Angstrom ( $1\text{\AA} = 10^{-10}$  m).  
 1 arcmin  
 (ou 1') : une minute d'arc ( $1/60^{\text{ème}}$  de degré).  
 1 arcsec  
 (ou 1'') : une seconde d'arc ( $1/3600^{\text{ème}}$  de degré).

---

<sup>1</sup>Dépend de l'espace considéré.

# Introduction

Avec la poursuite du progrès, la recherche scientifique, et la multitude d'expériences qu'elle engendre, amoncelle chaque jour un peu plus de données. Celles-ci revêtent diverses formes et sont généralement décrites par un *signal*, c.-à-d. dans la plupart des cas, par l'association d'un temps ou d'une position à une "valeur". Mathématiquement, il s'agit donc d'une *fonction* qui, pour les besoins de la cause, est tantôt continue, tantôt discrète, uni- ou bi-dimensionnelle, sphérique, etc.

Dans ce contexte, la compréhension d'un problème (physique) donné consiste à traiter ce signal afin d'y distinguer l'information considérée comme importante.

Une première approche consiste à analyser le contenu *fréquentiel* de cet objet au moyen de la transformée de Fourier. Malheureusement, cette méthode atteint vite ses limites. La transformation réalisée est totale : l'aspect fréquentiel d'un signal remplace son aspect spatial, et vice versa, sans interaction entre ces deux points de vues. En outre, la transformée de Fourier, de par sa globalité, est incapable de localiser les variations abruptes (transitoires) d'une fonction, généralement séparées par des zones aux comportements plus doux.

Une seconde approche permet, d'une part, de faire coexister les descriptions spatiale et fréquentielle d'un signal, et d'autre part, de "déployer" ce dernier dans un espace de plus grande dimension, l'espoir étant que l'information utile se trouvera alors décorrélée de celle qui ne l'est pas (*bruit*). Il s'agit d'une classe importante de transformations linéaires dites *temps-fréquence* ou *temps-échelle*<sup>4</sup>. Un signal  $y$  est étudié par sa comparaison avec une famille de fonctions, ou *atomes*, issues d'une même fonction *mère* en appliquant à celle-ci des transformations simples : translation, dilatation, modulation, rotation, étirement, etc. La transformée de Gabor, les transformées en ondelettes discrète (DWT<sup>5</sup>) et continue (CWT<sup>6</sup>), ainsi que certains repères de fonctions entrent par exemple dans ce schéma.

Il est amusant de constater que la nature semble également avoir choisi cette voie. Par l'analyse des processus fondamentaux intervenant dans la vision animale (voire humaine), il apparaît premièrement que l'oeil procède à une décomposition *multi-échelle* d'une image observée sans intervention du cerveau<sup>7</sup> [Mar82, Koe84]. Ainsi, face à un panorama monta-

---

<sup>4</sup>Le "temps" est employé dans son sens générique, c.-à-d. qu'il dénote la position d'une valeur dans l'espace du signal analysé.

<sup>5</sup>*Discrete Wavelet Transform.*

<sup>6</sup>*Continuous Wavelet Transform.*

<sup>7</sup>Phénomène de vision à *bas niveau* (*early visual system*).

gneux de “carte postale”, nous nous attardons tout d’abord à la vision d’ensemble, c.-à-d. aux montagnes, aux vallées, pour ensuite nous focaliser sur les détails comme les ruisseaux, la disposition des sapins, etc.

Deuxièmement, l’image observée est en réalité projetée par le cristallin sur la rétine, où un ensemble de cellules (ou *champs réceptifs*) analyse localement son contenu. Des expériences de psychophysique visuelle [Mar82, Hub88, Bha99] permettent en outre de conclure que certaines cellules sont sensibles à la taille ou à l’orientation des éléments de l’image.

Mathématiquement, le premier aspect du processus de vision est assez proche du fonctionnement de l’analyse en ondelettes bidimensionnelle. Une image est en effet analysée par des *ondelettes* générées entre autre par dilatation d’une ondelette mère, ce qui procure la vision d’échelle désirée. Pour le second aspect, la transformée continue en ondelettes [AMV04], les repères qu’elle engendre, ainsi que d’autres approches telles les ridgelets, les curvelets [CD99], les bandelets [LM03], les contourlets [DV02], et autres \*lets, offrent cependant plus de flexibilité que la DWT. Cette dernière utilise pour décomposer une image des produits tensoriels de bases (bi)orthogonales d’ondelettes unidimensionnelles [Dau92, Mal98], construction qui est incompatible avec une rotation précise et libre des filtres employés. En outre, il semble que les premières techniques partagent avec la nature le choix d’une base de fonctions *surcomplète* [Don98, Lee96] ce qui n’est pas le cas de la DWT classique (décimée).

Nous consacrerons une partie importante du présent document à la notion de *directionnalité* lors de la conception de repères d’ondelettes du plan. Cette propriété, qui semble essentielle pour la vision biologique, donne lieu à une meilleure représentation des contours d’objets dans les décompositions d’images utilisant ces repères. Elle génère en outre une redondance supplémentaire qui, exploitée à bon escient, permet de réduire les effets d’un bruit additif (gaussien).

Nous montrerons également comment cette directionnalité, généralement perçue comme un paramètre figé, peut dans certains cas être adaptée localement aux éléments d’une image. Cette idée part du constat qu’une tache isotrope, un segment de droite ou une courbe ne sont pas décrits de manière optimale par des ondelettes possédant la même *sélectivité* angulaire. Nous définirons ainsi le concept d’analyse d’images *multisélective* en contrôlant le comportement fréquentiel des ondelettes via un schéma de multirésolution circulaire. Dans ce cadre, des règles de récurrence héritées de ce schéma associent des ondelettes d’une certaine sélectivité angulaire pour générer des ondelettes un peu moins directionnelles jusqu’à l’obtention d’une ondelette totalement isotrope. Dans le cas d’un repère d’ondelettes linéaire, ces différents *niveaux de sélectivité* ont la possibilité de s’ajuster localement au contenu d’une image. Nous verrons que cette adaptabilité fournit de meilleures reconstructions que les méthodes à sélectivité fixe lors d’approximations non linéaires d’images.

Cette thèse traitera également du problème de l’analyse de données représentées sur la sphère. Il a été établi [AV99, ADJ01] que la CWT s’étend à cet espace par l’emploi d’une

dilatation *stéréographique* respectant la compacité de  $S^2$ . La flexibilité de cette dilatation et sa définition purement spatiale complètent les autres définitions d'analyse en ondelettes sphériques. Dans [FMZ03], la dilatation est définie en fréquence sans garantir la localité des filtres en positions. Dans [SS95] par contre, une transformée en ondelettes discrète est définie sur une grille icosaédrique de  $S^2$  sans correspondance avec une valeur d'échelle continue.

En améliorant le travail déjà entrepris en [ADJ01], nous réaliserons une implémentation rapide de la transformée continue en ondelettes sphérique (SCWT<sup>8</sup>) en travaillant sur le domaine fréquentiel de celle-ci. Pour ce faire, le développement en harmoniques sphériques des ondelettes dilatées sera observé pour déterminer les limites de validité de la transformée face à l'échantillonnage (numérique) des fonctions analysées.

Dans certains cas, il est utile de réduire la redondance de la SCWT, ne fut ce que pour faciliter le traitement des données dans l'espace multi-échelle de la transformée. Nous étudierons par conséquent comment créer des repères sphériques semi-continus, où seule l'échelle est échantillonnée, et totalement discrétisés. Nous tirerons parti dans ce dernier cas de grilles sphériques *équi-angulaires* et des règles de quadrature associées pour obtenir des conditions suffisantes à la reconstruction des fonctions analysées. Les capacités d'analyse et de synthèse de repères d'ondelettes DOG<sup>9</sup> seront également testées sur des exemples de données sphériques.

Une dernière partie de ce document sera dédiée à l'étude d'un objet physique étonnant : la *couronne solaire*. Cette couche extérieure du soleil est observée depuis 1996 par l'expérience EIT<sup>10</sup> à bord du satellite SoHO<sup>11</sup> dans différentes longueurs d'onde de l'ultraviolet lointain (EUV<sup>12</sup>). La quantité d'images enregistrées depuis le début du fonctionnement d'EIT est immense (> 170 000 images). La compréhension physique des multiples phénomènes apparaissant dans la couronne solaire passe donc par la création de méthodes automatiques de traitement d'images autorisant l'étude de ces enregistrements dans leur globalité. Dans cette tâche, nous nous limiterons à deux problèmes particuliers. Premièrement, la caméra CCD de EIT est soumise à un flot permanent de rayons cosmiques issus du soleil et de sources indéterminées dans la galaxie. Ceci occasionne un bruitage spécifique des images prenant la forme de traces brillantes (*traces cosmiques*) isolées. En combinaison avec un filtrage médian classique, nous verrons que la CWT utilisée comme un outil d'analyse de régularité (Hölderienne) locale supprime ces traces. Deuxièmement, la couronne solaire contient des éléments de faible taille (< 60 arcsec) nommés points brillants (ou BPs pour *Bright points* [Phi92, ZKW01, Har93]). Ceux-ci trouvent leur origine dans l'échauffement local du plasma coronal sous l'action du champ magnétique solaire. Leur enregistrement correspond à un rehaussement lumineux sur des zones restreintes des images EIT. En abordant une approche similaire à celle développée en [Bij99], nous étudierons comment

---

<sup>8</sup>*Spherical Continuous Wavelet Transform.*

<sup>9</sup>*Difference of Gaussians.*

<sup>10</sup>*Extreme ultraviolet Imaging Telescope.*

<sup>11</sup>*Solar and Heliospheric Observatory.*

<sup>12</sup>*Extreme Ultra-Violet.*

sélectionner et caractériser ces BPs en décomposant une image en ses *objets* constitutifs. Ces derniers sont issus de *tubes de maxima* dans la description multi-échelle de l'image, c.-à-d. d'une généralisation discrète des *lignes de maxima* de la CWT.

En ce qui concerne la structure proprement dite de cette thèse, le premier chapitre introduit la notion de représentation fréquentielle de signaux, et ce, sur trois types d'espaces : la droite, le plan et la sphère. Nous observons également comment ces représentations subsistent lorsque ces domaines sont discrétisés (échantillonnés).

Le second chapitre est consacré au développement de la transformée continue en ondelettes. La définition de la CWT à une dimension est tout d'abord introduite. Les conditions nécessaires à sa réalisation, comme l'*admissibilité* de son ondelette mère, sont ensuite établies, avant la présentation de ses propriétés de covariance et de redondance. Nous observons ensuite comment généraliser la CWT à deux dimensions par l'ajout d'une rotation lors de la création des ondelettes. Une classe importante d'ondelettes mères, dites *directionnelles* [AMV99], est par ailleurs introduite. Finalement, la CWT est étendue à la sphère par la définition de la dilatation *stéréographique*.

Le troisième chapitre présente deux applications de la CWT. Dans la première, nous étudions le lien qui existe entre la régularité (Hölderienne) locale de fonctions et la décroissance des coefficients en ondelettes [HT90, Jaf91]. Nous introduisons également une extension directionnelle à celui-ci pour sonder toute la richesse comportementale des fonctions planes. La seconde application consiste à estimer le rayon de courbure des contours d'objets dans des images au moyen d'ondelettes directionnelles [AJ03b]. Nous montrons pour ce faire que la réponse angulaire des coefficients associés dépend de ce rayon.

Dans le quatrième chapitre, nous explorons la notion de *repères* d'ondelettes, autrement dit, les conditions permettant la discrétisation partielle ou complète de l'analyse continue tout en garantissant la reconstruction des signaux analysés. Cette question est premièrement envisagée abstraitement dans le cadre général de la décomposition d'une fonction dans un espace de Hilbert. Nous parlons ensuite des repères d'ondelettes du plan, en insistant sur le rôle de la directionnalité de ces dernières. Cette propriété est ensuite contrôlée pour mener à la création de repères d'ondelettes dits (angulairement) *multisélectifs*. Finalement, les conditions de construction de repères (stéréographiques) d'ondelettes sur  $S^2$  sont étudiées.

Le cinquième chapitre est consacré au problème spécifique de l'analyse des images de l'expérience EIT. Après quelques brefs rappels de physique solaire, nous détaillons l'expérience elle-même, c.-à-d. son contexte physique, ses objectifs et ses contraintes, pour ensuite appliquer l'analyse en ondelettes à deux problèmes de traitement d'images, à savoir la détection et la suppression de "traces cosmiques" sur les images, et la détection/classification des points brillants (BPs) de la couronne solaire.

Nous attirons l'attention sur le fait que les chapitres, sections et sous-sections relatives aux nouveaux développements et résultats de cette thèse ont été marqués du symbole  $\square$ .

En outre, pour éviter l'alourdissement du texte, les démonstrations des propositions, théorèmes et lemmes ont été placées dans l'annexe A.

L'annexe B présente quant à elle un complément sur la transformée en ondelettes discrète et l'analyse multirésolution, utile à l'établissement de l'analyse multisélective de la section 4.4.

La dernière annexe présente finalement la toolbox YAWTB [Yaw] développée dans l'Institut de Physique Théorique FYMA de l'Université catholique de Louvain. Il s'agit d'une collection libre [Gpl] de programmes Matlab© réalisant la plupart des méthodes et algorithmes présentés dans ce document.



# Chapitre 1

## Représentations fréquentielles

Ce chapitre introduit la notion de représentation fréquentielle d'une fonction dans divers espaces, continus ou discrétisés.

Nous donnons quelques brefs rappels d'analyse afin d'asseoir les différents concepts et définitions utilisés ultérieurement dans ce document.

La transformée de Fourier d'un signal unidimensionnel est ensuite présentée, avant d'aborder le problème de sa discrétisation régulière.

Les concepts de fréquence et d'échantillonnage sont finalement étendus au plan et à la sphère.

### 1.1 Représentations fréquentielles de signaux

#### 1.1.1 Notions d'analyse

Soit une fonction (ou *signal*)

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t). \end{array} \quad (1.1)$$

Sa régularité s'évalue par son appartenance à l'espace

$$C^m(\mathbb{R}) = \{(g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) : \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, m], g^{(k)} = \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \in C^0(\mathbb{R})\}, \quad (1.2)$$

pour  $m \in \mathbb{N}^0$  et où  $C^0(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Par extension, l'espace  $C^\infty(\mathbb{R})$  correspond à la classe des fonctions indéfiniment dérivables.

Nous dirons que  $f$  est d'*énergie finie*<sup>1</sup> (ou carré intégrable) si

$$f \in L^2(\mathbb{R}, dt) = \{(g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) : \|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} dt |g(t)|^2 < \infty\}. \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>En rapport avec la notion physique de l'énergie introduite en *électromagnétisme* comme l'intégration sur un volume du carré de l'amplitude d'un champ électrique (ou magnétique).

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons par la suite  $L^2(\mathbb{R}, dt) \equiv L^2(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|_2 \equiv \|\cdot\|$ .

$L^2(\mathbb{R})$  est en réalité un espace de *Hilbert* associé au produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt f^*(t) g(t), \quad \langle f | f \rangle = \|f\|^2, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (1.4)$$

où  $*$  désigne la conjugaison complexe.

Ce produit scalaire<sup>2</sup> lie l'espace des fonctions de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall m, n \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R}_+, \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^m f^{(n)}| \leq C \}, \quad (1.5)$$

à l'espace des *distributions tempérées*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ d \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \forall s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle s | d \rangle < \infty \}, \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{D}$  est l'espace des distributions sur  $\mathbb{R}$ , c.-à-d. l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur  $C^\infty(\mathbb{R})$  [Sch98]. Un exemple de fonction de Schwartz est la gaussienne  $g(t) = \exp(-t^2)$ , tandis que la "fonction" de Dirac  $\delta(t)$  définie par

$$\langle \delta | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt \delta(t) f(t) = f(0), \quad \forall f \in \mathcal{S}, \quad (1.7)$$

appartient  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Les fonctions de Schwartz forment une sous-classe de l'ensemble des fonctions à *décroissance rapide*

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}) = \{ (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) : \forall m \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R}_+, \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^m f(t)| \leq C \}. \quad (1.8)$$

Ce dernier espace fonctionnel sera souvent utilisé dans ce document.

L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  appartient à une classe d'espaces tout à fait générale

$$L^p(\mathbb{R}, dt) \equiv L^p(\mathbb{R}) = \{ (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) : \|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} dt |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \}, \quad (1.9)$$

avec  $p \geq 1$ . Pour  $p \neq 2$ , la norme  $\|\cdot\|_p$  n'est cependant pas liée à un produit scalaire. Les  $L^p(\mathbb{R})$  ne sont donc pas des espaces de Hilbert, mais des espaces de *Banach*<sup>3</sup>.

Pour terminer cette section, signalons que l'ensemble des concepts définis plus haut s'étendent à tout espace mesurable  $E$ . Par exemple, sur la sphère  $S^2$  paramétrisée par la colatitude (ou azimuth)  $\theta \in [0, \pi]$  et la longitude  $\varphi \in S_1 = [0, 2\pi]$  (angle équatorial), la mesure de Lebesgue est

$$d\mu(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (1.10)$$

<sup>2</sup>En réalité, ce produit scalaire est relié à la définition d'un *triplet* de Gel'fand  $\mathcal{S} \subset \mathfrak{H} \subset \mathcal{S}'$  plutôt qu'à la seule définition de  $\mathfrak{H}$  [GV64].

<sup>3</sup>Espaces vectoriels normés et complets.

et l'espace des fonctions d'énergie finie devient

$$L^2(S^2, d\mu) \equiv L^2(S^2) = \{(g : S^2 \rightarrow \mathbb{C}) : \|g\|^2 = \int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) |g(\theta, \varphi)|^2 < \infty\}. \quad (1.11)$$

Le produit scalaire sur  $L^2(S^2)$  est quant à lui défini par

$$\langle f | g \rangle = \int_{S^2} d\mu(\omega) f^*(\omega) g(\omega), \quad \forall f, g \in L^2(S^2), \quad (1.12)$$

avec l'angle solide  $\omega = (\theta, \varphi)$ .

### 1.1.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier réalise un changement de représentation dans la description d'une fonction  $f$ . Par la décomposition de cette dernière en fonctions oscillantes "pures" (monochromes), la lecture du contenu de  $f$  s'effectue alors fréquemment.

Cette transformée est formellement définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dt f(t) e^{-i\xi t}, \quad (1.13)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$  est la *fréquence*<sup>4</sup> de  $\hat{f}(\xi)$ .

Puisque

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} dt |f(t)|, \quad (1.14)$$

l'intégrale (1.13) converge pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . L'application  $\mathcal{F}$  qui à  $f$  associe sa transformée  $\hat{f}$ , opère donc de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $B(\mathbb{R}) = \{(g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) : \exists b \in \mathbb{R}_+ : |g| < b\}$ , l'espace des fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.1.** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}(\xi) e^{i\xi t}. \quad (1.15)$$

En remarquant que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , c.-à-d. qu'il est toujours possible de trouver une suite  $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$  pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , la transformée de Fourier s'étend à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  [Mal98].

**Proposition 1.2.** *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , alors l'égalité de Plancherel*

$$\int_{\mathbb{R}} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 \quad (1.16)$$

---

<sup>4</sup>En réalité, il s'agit plutôt d'une pulsation, c.-à-d.  $\xi = 2\pi\nu$  où  $\nu$  est la fréquence. Nous utiliserons cependant cet abus de langage par la suite.

est vérifiée. En outre,  $\|f - f_r\| = 0$  avec

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}(\xi) e^{i\xi t}, \quad (1.17)$$

ce qui équivaut à dire que la reconstruction (1.17) est obtenue presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

Par conséquent,  $\mathcal{F}$  crée une isométrie entre  $L^2(\mathbb{R})$  et lui-même.

La transformée de Fourier s'étend également à l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  [Sch98]. Suivant la formulation (1.7), la distribution de Dirac est par exemple associée à

$$\hat{\delta}(\xi) = 1. \quad (1.18)$$

Introduisons maintenant l'opération de *convolution* entre deux fonctions. Celle-ci est définie formellement par

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} du f(u - t) g(u), \quad (1.19)$$

pour  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Cette opération permet, entre autre, la modélisation d'un filtrage linéaire et invariant dans le temps (stationnaire) d'un signal  $f$  au moyen d'un filtre  $g$  [Lyn82].

Tout comme le produit scalaire défini en (1.4), cette convolution se transpose simplement en Fourier.

**Proposition 1.3.** *Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $L^2(\mathbb{R})$ , alors*

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}^*(\xi) \hat{g}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle, \quad (1.20)$$

et,

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \quad (1.21)$$

La dernière égalité est connue sous le nom de *théorème de convolution*.

Pour terminer cette section, observons comment certaines transformations ou propriétés d'une fonction  $f$  se traduisent dans l'espace de Fourier :

$$f(t) \mapsto f(t - \tau) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \mapsto \hat{f}(\xi) e^{-i\xi\tau}, \quad (1.22a)$$

$$f(t) \mapsto f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \mapsto |\alpha| \hat{f}(\alpha\xi), \quad (1.22b)$$

$$f(t) \mapsto f(-t) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \mapsto \hat{f}(-\xi), \quad (1.22c)$$

$$f^{(n)}(t) \mapsto (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \quad (1.22d)$$

$$f \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = \hat{f}^*(-\xi), \quad (1.22e)$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (1.22f)$$

pour  $t, \xi, \tau, \alpha \in \mathbb{R}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.3 Discrétisation

Il est rare en pratique d'analyser un signal continu<sup>5</sup>. En général, seul un ensemble discret de valeurs est disponible. Cette *discrétisation* est en outre le seul type d'information traitable numériquement.

Il est donc important d'établir sous quelles conditions un signal discrétisé est équivalent à sa version continue (hypothétique).

Modélisons tout d'abord cette transformation en supposant un *échantillonnage* du signal  $f$  réalisé tous les intervalles de temps  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , c.-à-d. en formant

$$f_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(t - nT), \quad (1.23)$$

à partir des *échantillons*  $\{f(nT) : n \in \mathbb{Z}\}$ .

Intuitivement, il est clair que si  $f$  "oscille" trop rapidement par rapport à l'échelle de temps  $T$ , la discrétisation décrite en (1.23) va inmanquablement gommer ce comportement.

Mathématiquement, cette notion est affinée en introduisant la définition suivante.

**Définition 1.1.** Une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est dite à bande limitée s'il existe un  $\xi_0 \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\hat{f}(\xi) = 0$  si  $|\xi| > \xi_0$ , auquel cas,  $\xi_0$  est la bande passante de  $f$ .

Nous désignons par  $\mathcal{B}_{\xi_0}$ , l'ensemble des fonctions de bande passante<sup>6</sup>  $\xi_0 \in \mathbb{R}_+$ , c.-à-d.

$$\mathcal{B}_{\xi_0} = \{g \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{g}(\xi) = 0, \forall |\xi| > \xi_0\}. \quad (1.24)$$

Dès lors, sous certaines conditions, la fonction continue  $f$  peut être reconstruite à l'aide du théorème de Shannon-Whittaker.

**Théorème 1.1.** Si  $f$  est une fonction à bande limitée de bande passante  $\xi_0 \leq \frac{\pi}{T}$ , alors

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(t - nT), \quad (1.25)$$

avec  $h_T(t) = \left(\frac{\pi t}{T}\right)^{-1} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \equiv \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ . Dans le cas inverse, c.-à-d. si  $\xi_0 > \frac{\pi}{T}$ , il n'est pas possible de reconstruire  $f$  à partir des valeurs  $f(nT)$ .

La preuve de ce théorème consiste à remarquer que (1.23) peut se réécrire comme

$$f_d(t) = f(t) \text{III}_T(t), \quad (1.26)$$

avec  $\text{III}_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$  est le *peigne de Dirac*.

Par conséquent, en inversant le rôle des fréquences et des positions dans le théorème de convolution, nous obtenons

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \widehat{\text{III}}_T)(\xi). \quad (1.27)$$

<sup>5</sup>Le filtrage analogique, malgré une perte de souplesse et un manque de précision par rapport à une analyse digitale, offre cependant cette possibilité.

<sup>6</sup>La notion de "bande passante" réfère ici à un intervalle centré sur l'origine fréquentielle.

En outre, en employant la covariance sous translation de la transformée de Fourier donnée en (1.22a),

$$\widehat{\text{III}}_T(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\xi T}. \quad (1.28)$$

**Lemme 1.1.** *La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, c.-à-d.*

$$\widehat{\text{III}}_T(\xi) = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T}(\xi). \quad (1.29)$$

Ce lemme est une réécriture de la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\xi T} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - k\frac{2\pi}{T}), \quad (1.30)$$

valable au sens des distributions [Mal98].

Par conséquent,

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - k\frac{2\pi}{T}). \quad (1.31)$$

Autrement dit, la transformée de Fourier de  $f_d$  est une périodisation de celle de  $f$ . Si  $f \in \mathcal{B}_{\xi_0}$ , avec  $\xi_0 < \frac{2\pi}{T}$ ,

$$\hat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\xi) \hat{f}_d(\xi). \quad (1.32)$$

En remarquant que  $\hat{h}_T(\xi) = T \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi)$ , l'équation (1.25) est démontrée par le théorème de convolution.

Si  $f \notin \mathcal{B}$ , c.-à-d. si le support de  $\hat{f} \not\subseteq [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , la relation (1.31) indique que la périodisation de  $\hat{f}$  introduit des chevauchements au voisinage des points  $(2k+1)\frac{\pi}{T}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Il y a alors perte d'information dans la représentation de  $f$  par  $f_d$ . L'intuition développée précédemment pour introduire le théorème de Shannon est donc vérifiée. Ce phénomène est connu sous le nom d'*aliasing*.

Pour terminer, les fonctions à bande limitée permettent également de discrétiser le produit scalaire et la convolution définis plus haut.

**Proposition 1.4.** *Si  $f, g \in \mathcal{B}_{\xi_0}$ , avec  $\xi_0 < \frac{\pi}{T}$ , alors*

$$\langle f | g \rangle = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(nT) g(nT) \quad (1.33)$$

$$(f * g)(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) g(t - nT). \quad (1.34)$$

La preuve de cette proposition est présentée à l'annexe A (Sec. A.1, p. 159).

### 1.1.4 Implémentation

En pratique, le calcul numérique impose de considérer des signaux de longueur finie, ne fut-ce que par la taille limitée de leur support d'enregistrement.

Supposons dans la suite que  $T = 1$  pour simplifier les calculs. Soit  $f \in \mathcal{B}_\pi$  une fonction à support fini, c.-à-d.  $\text{supp}(f) = [0, N]$ . Pour revenir au cas précédent, nous commençons par définir la périodisation

$$f_p(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t + mN). \quad (1.35)$$

Même si  $f_p(t) \notin L^2(\mathbb{R})$ , en restreignant la somme apparaissant dans (1.35) à  $m \in [-M, M]$ , pour  $M \in \mathbb{N}$ , et en passant à la limite  $M \rightarrow \infty$ , la formule de Poisson montre facilement que

$$\hat{f}_p(\xi) = \frac{2\pi}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \delta\left(\xi - n\frac{2\pi}{N}\right). \quad (1.36)$$

Par conséquent, la modélisation (1.23) associée à  $f_p$  devient

$$f_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_p(n) \delta(t - n), \quad (1.37)$$

et, en employant (1.31),

$$\hat{f}_d(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_p(\xi - 2\pi k) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k, n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \delta\left(\xi - \frac{2\pi}{N}(n + kN)\right), \quad (1.38)$$

où  $n$  est restreint à  $N$  valeurs puisque  $\hat{f}(n) = 0$  pour  $|n| > \frac{N}{2}$ .

En conclusion, la discrétisation apparaît à la fois en position et en fréquence, et, tout comme  $f_d$ ,  $\hat{f}_d(\xi)$  est complètement déterminé par  $N$  fréquences  $\xi = n\frac{2\pi}{N}$  pour  $n \in \mathbb{Z}[N] = \{0, \dots, N-1\}$ .

Ceci nous amène à analyser le contenu fréquentiel de tout vecteur  $\{f[n] : n \in [0, N[[]\}$  représentant un signal continu  $f$ , au moyen de la transformée de Fourier *discrète*

$$\hat{f}[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} f[n] \exp(-i\frac{2\pi}{N}kn), \quad (1.39)$$

où les crochets employés pour indiquer les éléments de  $f$  et de  $\hat{f}$  rappelle les caractères discret et fini de la démarche [Mal98].

En remarquant que la famille  $\{e_k[n] = \exp(i\frac{2\pi}{N}kn) : k \in [0, N[[]\}$  est une base orthogonale des séquences discrètes de périodes  $N$ , la transformée discrète inverse s'obtient par

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}[N]} \hat{f}[k] \exp(i\frac{2\pi}{N}kn). \quad (1.40)$$

De manière brutale, le calcul de l'ensemble des  $\hat{f}[k]$ , ainsi que celui de la reconstruction des  $f[n]$  à partir de ces coefficients, requiert  $O(N^2)$  opérations<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Additions et multiplications (éventuellement complexes) confondues.

Il existe cependant un algorithme rapide pour réaliser ces opérations : la FFT<sup>8</sup>. Ce dernier évalue l'ensemble des valeurs  $\hat{f}[k]$  (ou  $f[n]$ ) en  $O(N \log_2 N)$  opérations.

En supposant que pour une fonction  $f \in \mathcal{B}_\pi$  de support  $[0, N]$ , la valeur  $\hat{f}[k]$  corresponde au contenu fréquentiel de la fonction continue  $f(t)$  en  $\xi = \frac{2\pi}{N}k$ , c.-à-d.  $\hat{f}(\frac{2\pi}{N}k)$ , la FFT nous permet d'obtenir un calcul rapide de la transformée de Fourier de  $f(t)$ .

## 1.2 Extension à $L^2(\mathbb{R}^2)$

Toutes les notions vues à la section précédente s'étendent sans peine au cas bidimensionnel.

Soit une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}). \end{array} \quad (1.41)$$

Une telle fonction modélise souvent une *image* monochrome ou en niveaux de gris, c.-à-d. l'association d'un point de  $\mathbb{R}^2$  à une intensité lumineuse<sup>9</sup>.

La régularité bidimensionnelle de  $f$  se mesure par son appartenance à

$$C^m(\mathbb{R}^2) = \left\{ (g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}) : (\forall k, l \in \mathbb{N} : k + l \leq m), \frac{\partial^{k+l} g}{\partial x^k \partial y^l} \in C^0(\mathbb{R}^2) \right\}, \quad (1.42)$$

où  $C^0(\mathbb{R}^2)$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

En outre,  $f$  est de carré intégrable si  $f \in L^2(\mathbb{R}^2) \equiv L^2(\mathbb{R}^2, d^2\vec{x})$  avec

$$L^2(\mathbb{R}^2, d^2\vec{x}) = \left\{ (f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}) : \|f\| = \left( \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} |f(\vec{x})|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}. \quad (1.43)$$

La transformée de Fourier s'étend sans peine à  $L^2(\mathbb{R}^2)$  par les mêmes arguments qu'à la section précédente, de sorte que, pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (1.44)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^2, \quad (1.45)$$

avec  $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{k} = (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ .

Celle-ci respecte la relation de Plancherel

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} |f(\vec{x})|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2, \quad (1.46)$$

<sup>8</sup>Pour *Fast Fourier Transform*. Nous ne détaillons pas cet algorithme dans ce document. A titre indicatif, nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages [Lyn82, Mal98].

<sup>9</sup>Les images couleur sont elles issues d'une fonction vectorielle remplaçant, par exemple, l'intensité lumineuse par un triplet d'intensités associées à trois couleurs fondamentales : rouge, vert et bleu. Les particularités d'une telle représentation ne sont cependant pas étudiées dans ce document.

et vérifie des propriétés équivalentes à (1.22) :

$$f(\vec{x}) \mapsto f(\vec{x} - \vec{b}) \Leftrightarrow \hat{f}(\vec{k}) \mapsto \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{b}}, \quad (1.47a)$$

$$f(\vec{x}) \mapsto f(a^{-1}r_\theta^{-1}\vec{x}) \Leftrightarrow \hat{f}(\vec{k}) \mapsto |a|\hat{f}(ar_\theta^{-1}\vec{k}), \quad (1.47b)$$

$$[\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f](\vec{x}) \mapsto (ix)^m (iy)^n \hat{f}(\vec{k}), \quad (1.47c)$$

pour  $\vec{x}, \vec{k}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Tout comme à une dimension, et pour une période d'échantillonnage  $T \in \mathbb{R}_+^*$  supposée identique selon les axes  $x$  et  $y$ , cette fonction se discrétise sur les points  $\{\vec{x}_{mn} = (mT, nT) : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$  à l'aide de

$$f_d(\vec{x}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(\vec{x}_{mn}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_{mn}), \quad (1.48)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac étendue à deux dimensions.

Sous certaines hypothèses,  $f_d$  caractérise complètement  $f$ , laquelle peut être reconstruite à l'aide des valeurs  $f(\vec{x}_{mn})$ .

**Théorème 1.2.** *Si  $f \in \mathcal{B}_{k_0}$ , avec*

$$\mathcal{B}_{k_0} = \{g \in L^2(\mathbb{R}^2) : f(\vec{k}) = 0, \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^2 : \max(|k_x|, |k_y|) < k_0\}, \quad (1.49)$$

pour un certain  $0 < k_0 \leq \frac{\pi}{T}$ , alors

$$f(\vec{x}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(\vec{x}_{mn}) h_T(\vec{x} - \vec{x}_{mn}), \quad (1.50)$$

avec  $h_T(\vec{x}) = \text{sinc}(\frac{\pi}{T}x) \text{sinc}(\frac{\pi}{T}y)$ . Si  $k_0 > \frac{\pi}{T}$ , il est impossible de reconstruire  $f$  à partir des valeurs  $f(\vec{x}_{mn})$ .

Ce théorème est une généralisation immédiate du théorème unidimensionnel 1.1.

Encore une fois, l'ensemble  $\mathcal{B}_{k_0}$ , avec  $k_0 < \frac{\pi}{T}$ , est stable sous discrétisation. En effet, pour  $f, g \in \mathcal{B}_{k_0}$ , il est facile d'étendre (1.33) et (1.34) sur le plan pour obtenir

$$\langle f | g \rangle = T^2 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f^*(\vec{x}_{mn}) g(\vec{x}_{mn}) \quad (1.51)$$

$$(f * g)(\vec{x}) = T^2 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(\vec{x}_{mn}) g(\vec{x} - \vec{x}_{mn}), \quad (1.52)$$

où  $(f * g)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} f(\vec{y}) g(\vec{x} - \vec{y})$ .

Puisque en pratique, en plus d'être discrétisée, une image  $f$  possède un support fini, le contenu fréquentiel de  $f$  est analysé au moyen de la transformée de Fourier bidimensionnelle discrète. En supposant  $T = 1$  et  $\text{supp}(f) = [0, N] \times [0, N]$ , celle-ci est définie par

$$\hat{f}[k, l] = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}[N]} f[m, n] \exp(-i\frac{2\pi}{N}(km + ln)), \quad (1.53)$$

$$f[m, n] = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}[N]} \hat{f}[k, l] \exp(i\frac{2\pi}{N}(km + ln)), \quad (1.54)$$

où  $m, n, k, l \in \mathbb{Z}[N]$ ,  $f[m, n] = f(m, n)$ , et où  $\hat{f}[k, l]$  décrit le comportement fréquentiel de  $f$  au vecteur d'onde  $(k\frac{2\pi}{N}, l\frac{2\pi}{N})$ . L'algorithme FFT s'étend à cette nouvelle transformée de sorte que l'ensemble des  $N^2$  valeurs de  $\hat{f}[k, l]$  (ou de  $f[m, n]$ ) se calcule en  $O(N^2 \log^2 N)$  opérations, plutôt qu'en  $O(N^4)$  opérations avec un calcul direct.

## 1.3 Extension à $L^2(S^2)$

### 1.3.1 Transformée de Fourier sur $L^2(S^2)$

Sur la sphère, la représentation fréquentielle d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  est obtenue par sa décomposition dans la base orthonormée des *harmoniques sphériques*  $\{Y_l^m : (l, m) \in \mathcal{N}\}$ , avec  $\mathcal{N} = \{(l, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : |m| \leq l\}$  [Vil69]. Il s'agit des vecteurs propres de l'opérateur de Beltrami  $\Delta_S$  sur  $S^2$ , c.-à-d. le Laplacien en coordonnées sphériques.

Ces fonctions sont définies par

$$Y_l^m(\omega) = n_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (1.55)$$

où :

- $\omega = (\theta, \varphi) \in S^2$ ,
- $\theta$  est la colatitude,
- $\varphi \in S^1$  est la longitude,
- $P_l^m$  est le polynôme de Legendre associé d'ordre  $l$  [Vil69],
- et  $n_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$  est un facteur de normalisation choisi de telle sorte que

$$\langle Y_l^m | Y_{l'}^{m'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (1.56)$$

où  $\langle f | g \rangle = \int_{S^2} d\mu(\omega) f^*(\omega)g(\omega)$  est le produit scalaire sur  $L^2(S^2, d\mu) \equiv L^2(S^2)$ .

La transformée en harmoniques sphériques de  $f$ , aussi appelée transformée de Fourier sur la sphère<sup>10</sup>, est composée des coefficients

$$\hat{f}(l, m) = \langle Y_l^m | f \rangle. \quad (1.57)$$

La transformée inverse est elle obtenue selon

$$f(\omega) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \hat{f}(l, m) Y_l^m(\omega). \quad (1.58)$$

---

<sup>10</sup>Et également *série de Laplace*.

### 1.3.2 Théorème de corrélation

La corrélation entre deux fonctions sur la sphère est formellement définie de la manière suivante.

**Définition 1.2.** *La corrélation de deux fonctions  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  est la fonction  $g \star h : SO(3) \rightarrow \mathbb{C}$ , établie*

$$(g \star h)(\rho) = \langle R_\rho g | h \rangle = \int_{S^2} d\mu(\omega) [R_\rho g]^*(\omega) h(\omega), \quad (1.59)$$

où  $R_\rho g(\omega) = g(\rho^{-1}\omega)$  est la rotation de  $g$  par un élément  $\rho \in SO(3)$ .

Cette opération est semblable à la notion de convolution sphérique développée en [AV99].

La corrélation  $g \star h$  se simplifie dans le cas où  $g$  est *axisymétrique* (ou *zonale*), autrement dit, invariante sous rotation autour du pôle Nord. En effet, une rotation  $\rho \in SO(3)$  peut toujours être paramétrisée par ses trois angles d'Euler  $\alpha, \theta, \varphi \in S_1$  de la manière suivante

$$\rho = \rho(\varphi, \theta, \alpha) = r_\varphi^z r_\theta^y r_\alpha^z, \quad (1.60)$$

où  $r_\gamma^u$  dénote une rotation d'angle  $\gamma \in S_1$  autour d'un axe  $u$  (ici,  $y$  ou  $z$ ). Nous désignons également par  $R_\gamma^u$  l'opérateur de rotation sur  $L^2(S^2)$  tel que

$$[R_\gamma^u g](\omega) = g((r_\gamma^u)^{-1}\omega), \quad (1.61)$$

pour  $g \in L^2(S^2)$ .

Par conséquent, si  $g$  est axisymétrique, c.-à-d. si  $R_\alpha^z g = g$  pour tout  $\alpha \in S_1$ , nous aurons

$$[R_\rho g](\omega) = [R_\varphi^z R_\theta^y g](\omega), \quad (1.62)$$

et l'action de  $R_\rho$  sur  $g$  équivaut à son transport du pôle nord vers un point  $\omega = (\theta, \varphi) \in S^2$ .

Etant donné  $[\omega] = \rho(\varphi, \theta, 0) \in SO(3)$ <sup>11</sup>, nous définissons la corrélation  $\star$  par

$$(g \star h)(\omega) = \int_{S^2} d\mu(\omega') [R_{[\omega]} g]^*(\omega') h(\omega') = (g \star h)([\omega]), \quad (1.63)$$

pour éviter toute confusion avec la corrélation complète  $\star$ .

A l'instar de la droite ou du plan, l'opération  $\star$  s'exprime simplement dans l'espace fréquentiel.

**Théorème 1.3.** *Si  $h \in L^2(S^2)$  et si  $g \in L^2(S^2)$  est axisymétrique, alors*

$$\widehat{(g \star h)}(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{g}^*(l, 0) \hat{h}(l, m), \quad \forall (l, m) \in \mathcal{N}. \quad (1.64)$$

Ce théorème de *corrélation sphérique* se base sur le fait que l'axisymétrie de  $g$  implique que  $\hat{g}(l, m)$  est nulle pour  $m \neq 0$ . La preuve est donnée à l'annexe A (Sec. A.2, p. 159) et peut également être trouvée en [DH94].

<sup>11</sup>Eléments de  $SO(3)$  représentant de la classe d'équivalence à gauche de  $SO(3)/SO(2)$

### 1.3.3 Echantillonnage et règle de quadrature

Observons maintenant sous quelles conditions les concepts des sections précédentes peuvent être discrétisés sur  $S^2$ .

Remarquons tout d'abord qu'il existe plusieurs types de discrétisations (grilles) sphériques :

- les grilles *équi-angulaires* où deux points adjacents de la grille sont séparés par des angles constants ;
- les grilles *équi-distribuées* où chaque point est le centre d'une cellule de surface constante [CF97, GHR].

Nous utilisons ici la première classe de grilles<sup>12</sup>. En particulier, nous choisissons une grille carrée de la forme

$$\mathcal{G}_\beta = \{(\theta_p, \varphi_q) : p, q \in \mathbb{Z}[2\beta]\}, \quad (1.65)$$

avec  $\beta \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_p = (2p + 1)\frac{\pi}{4\beta}$  et  $\varphi_q = q\frac{\pi}{\beta}$ . Les latitudes  $\theta_p$  forment une grille dite *pseudo-spectrale*. Elles sont localisées sur les noeuds d'un polynôme de Chebyshev d'ordre  $2\beta$  [Boy89, DH94].

**Définition 1.3.** Une fonction  $f \in L^2(S^2)$  est à bande limitée, s'il existe un  $b \in \mathbb{N}$  tel que  $\hat{f}(l, m) = 0$  pour tout  $(l, m) \in \mathcal{N}$  et tout  $l \geq b$ .

L'ensemble des fonctions de largeur de bande  $\beta$  est dénoté par

$$\mathcal{B}_\beta = \{f \in L^2(S^2) : \hat{f}(l, m) = 0, \quad \forall (l, m) \in \mathcal{N}, l \geq b\}. \quad (1.66)$$

Pour la grille équi-angulaire donnée en (1.65), une formule de quadrature existe pour le calcul des coefficients de Fourier des fonctions à bande limitée sur  $S^2$  [FMZ03].

**Proposition 1.5.** Si  $g \in \mathcal{B}_\beta$ , il existe des poids  $w_p^\beta \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\hat{g}(l, m) = \int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta]} w_p^\beta g(\theta_p, \varphi_q) Y_l^{m*}(\theta_p, \varphi_q), \quad (1.67)$$

pour tout  $(l, m) \in \mathcal{N}_\beta = \{(l, m) \in \mathcal{N} : l < \beta\}$ .

Les poids  $w_p^\beta$  sont obtenus à l'aide de

$$w_p^\beta = \frac{2\pi}{\beta^2} \sin(\theta_p) \sum_{k \in \mathbb{Z}[\beta]} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\theta_p), \quad (1.68)$$

avec  $\sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta]} w_p^\beta = 4\pi$ .

---

<sup>12</sup>Il s'agit vraisemblablement de la discrétisation la plus répandue dans la littérature relative à la manipulation de données sphériques.

L'équation(1.67) constitue véritablement une *transformée de Fourier discrète* sur la sphère.

La *transformée de Fourier discrète inverse* s'obtient de la manière suivante

$$g(\theta_p, \varphi_q) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}_\beta} \hat{g}(l, m) Y_l^m(\theta_p, \varphi_q), \quad (1.69)$$

avec  $p, q \in \mathbb{Z}[2\beta]$ .

*Remarque 1.1.* Si  $f \in \mathcal{B}_\beta$ , la proposition 1.5 nous indique que les valeurs de  $f$  restreintes à la grille  $\mathcal{G}_\beta$  de taille  $2\beta \times 2\beta$  permettent le calcul des coefficients de Fourier  $\hat{f}(l, m)$  jusqu'à l'ordre  $\beta$  ( $l < \beta$ ). Ce point marque une différence par rapport à l'analyse spectrale de signaux à une et deux dimensions où la taille de l'espace fréquentiel égale celle de l'espace des positions. Mentionnons cependant qu'il existe des grilles sphériques où cette égalité réapparaît. C'est le cas de la règle de quadrature de Gauss-Legendre [Lan56] où les latitudes sont prises sur les zéros de polynôme de Legendre.

Pour  $l$  et  $m$  fixés, l'évaluation de (1.67) requiert  $O(\beta^2)$  opérations. Pour l'ensemble des  $(l, m) \in \mathcal{N}_\beta$ , soit  $\beta^2$  éléments, il faut donc escompter  $O(\beta^4)$  opérations. Cette estimation est identique pour l'évaluation de la transformée de Fourier discrète inverse.

Puisque selon (1.55),  $Y_l^m(\theta_p, \varphi_q) = n_{lm} P_l^m(\cos \theta_p) e^{im\varphi_q}$ , une transformée de Fourier discrète sur  $S_1$  peut être appliquée selon la longitude  $\varphi_q$  dans (1.67). En effet,

$$\hat{g}(l, m) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta]} w_p^\beta g(\theta_p, \varphi_q) Y_l^{m*}(\theta_p, \varphi_q) \quad (1.70)$$

$$= \sum_{p \in \mathbb{Z}[2\beta]} w_p^\beta n_{lm} \check{g}(\theta_p, m) P_l^m(\cos \theta_p), \quad (1.71)$$

avec  $\check{g}(\theta_p, m) = \sum_{q \in \mathbb{Z}[2\beta]} g(\theta_p, \varphi_q) e^{-im\varphi_q}$ . L'emploi d'une FFT en longitude permet ainsi de réduire le calcul des  $\hat{g}(l, m)$  à  $O(\beta^3 \log \beta)$  opérations [ADJ01].

Il existe cependant un algorithme rapide de calcul de la transformée de Fourier sphérique directe et inverse s'effectuant en  $O(\beta^2 \log^2 \beta)$ . Celui-ci, dû à J.R. Driscoll et D. M. Healy [DH94], emploie, d'une part, une transformée discrète en cosinus (DCT) selon la (co)latitude  $\theta_q$ , et d'autre part, les règles de récurrence des polynômes de Legendre [Vil69].



# Chapitre 2

## Analyse continue en ondelettes

### 2.1 Introduction

A l’instar de la transformée de Fourier, la *transformée continue en ondelettes* (CWT<sup>1</sup>) définit une nouvelle description pour une fonction  $f$  appartenant à un certain espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ .

Cependant, à l’inverse d’une représentation fréquentielle pure, la CWT de cette fonction ausculte simultanément son “contenu” spatial et en *échelle*, la dépliant ainsi dans un espace plus grand que l’espace initial.

Pratiquement, ce processus se réalise par la comparaison de  $f$  avec des transformations simples (affines) d’une fonction fondamentale, dite *ondelette mère*.

Ces transformations ne sont pas choisies au hasard. Elles forment généralement un *groupe* et dépendent de l’espace où vit la fonction analysée. Elles contiennent également une notion de dilatation essentielle à la paramétrisation en échelle de la transformée [Ant96].

Nous commençons par détailler la théorie menant à la transformée continue en ondelettes unidimensionnelle ( $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$ ), pour ensuite s’attarder au cas des ondelettes bidimensionnelles ( $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ ) et sphériques ( $\mathfrak{H} = L^2(S^2)$ ).

### 2.2 Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$

#### 2.2.1 Principe

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ou *signal*, d’énergie finie, c.-à-d.  $f \in \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$ . L’exploration du contenu de  $f$  peut premièrement être réalisée par la comparaison de cette dernière avec une fonction “sonde”  $\psi \in \mathfrak{H}$  connue. Ce processus se réalise par un produit scalaire, au sens de  $\mathfrak{H}$ , créant ainsi un coefficient

$$W_f = \langle \psi | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt \psi^*(t) f(t), \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Pour *Continuous Wavelet Transform*.

où le symbole  $*$  denote la conjugaison complexe.

Il est clair que  $W_f$  ne reflète qu'une information très partielle sur  $f$  : la similarité de cette dernière avec  $\psi$ . En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$W_f \leq \|f\| \|\psi\|, \quad (2.2)$$

l'égalité n'étant vérifiée que si  $f$  est proportionnelle à  $\psi$ .

Si le support  $A \subset \mathbb{R}$  de  $\psi$  est compact, le comportement de  $f$  sur le complémentaire  $\mathbb{C}A$  est inatteignable par cette expérience comparative. En outre, les variations de  $f$  seront moyennées sur  $A$  induisant de nouveau une perte d'information.

Il semble donc naturel de transformer  $f$  avant sa comparaison afin de parcourir l'ensemble des comportements réalisables par celle-ci. Sur la droite  $L^2(\mathbb{R})$ , les transformations naturelles sont celles du groupe affine  $G_{\text{aff}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , c.-à-d. le groupe formé par les translations et les dilatations. Ce groupe agit sur  $L^2(\mathbb{R})$  à l'aide d'une représentation  $U : G_{\text{aff}} \rightarrow \mathfrak{H}$  telle que

$$f_{b,a}(t) = [U(b,a)f](t) = \frac{1}{\sqrt{a^{3-n}}} f\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.3)$$

avec  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $(b,a) \in G_{\text{aff}}$ . Le paramètre  $n$  ajuste la normalisation des fonctions modifiées. Ainsi, avec  $n = 1$ , les  $f_{b,a}$  sont  $L^1$ -normalisées, c.-à-d.  $\|Uf\|_1 = \|f\|_1$ . Pour  $n = 2$ ,  $\|Uf\| = \|f\|$  et les  $f_{b,a}$  sont  $L^2$ -normalisées. Nous prendrons  $n = 2$  dans tout le reste de cette section en mentionnant ponctuellement les particularités propres à l'autre normalisation.

Nous pouvons par conséquent définir les coefficients

$$W'_f(b,a) = \langle \psi | U(b,a)f \rangle. \quad (2.4)$$

En pratique, il est difficile de transformer la fonction  $f$  a priori inconnue. En exigeant au préalable que  $U$  soit unitaire, c.-à-d. telle que

$$\langle U(b,a)h | U(b,a)g \rangle = \langle h | g \rangle, \quad (2.5)$$

pour tout  $h, g \in \mathfrak{H}$ , il est plus aisé de transformer  $\psi$  et de changer la place de  $U$  au sein du produit scalaire (2.4). Ceci donne lieu aux nouveaux coefficients

$$W_f(b,a) = \langle \psi_{b,a} | f \rangle = W'_f((b,a)^{-1}), \quad (2.6)$$

avec

$$[U(b,a)\psi](t) = \psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2.7)$$

Suivant l'idée que  $\psi$  mesure<sup>2</sup>  $f$ , ce dernier changement consiste à modifier l'instrument de mesure plutôt que l'objet de l'analyse, et donc de passer d'un point de vue *actif* de transformation à un point de vue *passif* [Ant96].

<sup>2</sup>Il s'agit d'une notion issue des fondements de la mécanique quantique.

En outre, si  $\psi$  est bien localisée autour de l'origine,  $\psi_{b,a}$  est centrée sur  $\vec{b}$  avec une étendue proportionnelle à  $a$ . La valeur d'un coefficient  $W_f(b, a)$  est donc en rapport avec le comportement de  $f$  autour de  $b$  sur un voisinage de taille proportionnelle à  $a$ . Ces deux paramètres sont donc tout naturellement nommés respectivement paramètre de *position* et paramètre d'*échelle*.

Sous certaines conditions appliquées à  $\psi$ , l'ensemble des coefficients  $W_f(b, a)$  caractérise univoquement  $f$  et constitue la *transformée continue en ondelettes* (CWT) de cette dernière. Nous détaillons ce point à la section suivante.

### 2.2.2 Définition

La formation des coefficients définis en (2.6) modifie la représentation de  $f$  : elle permet de passer d'une description temporelle à une description dite *temps-échelle*. Toutefois, lors de ce passage, il faut garantir qu'aucune information n'a été perdue, et, *in fine*, pouvoir reconstruire  $f$  au moyen de  $W_f$ .

Dans cette optique nous introduisons la définition suivante.

**Définition 2.1.** La fonction  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  est dite admissible si

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} = \int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} < \infty, \quad (2.8)$$

auquel cas  $\psi$  est nommée ondelette.

*Remarque 2.1.* Notons que, dans un contexte de théorie des groupes, exiger l'admissibilité de  $\psi$  revient à imposer à la représentation  $U$  qu'elle soit de *carré intégrable* et donc aussi irréductible [AAG00]. Cette dernière propriété garantit que la famille  $\{\psi_{b,a} : (b, a) \in G_{\text{aff}}\}$  n'engendre pas un sous espace invariant de  $\mathfrak{H}$  mais la totalité de celui-ci.

*Remarque 2.2.* Une condition nécessaire<sup>3</sup> pour respecter (2.8) est d'avoir  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Autrement dit,  $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$ , et  $\psi$  est une fonction de moyenne nulle qui doit donc *osciller*. L'appellation *ondelette* est donc bien choisie<sup>4</sup>.

Le passage de  $W_f$  à  $f$  est alors exprimé au sein du théorème suivant [Tor95].

**Théorème 2.1.** Soit  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  une ondelette admissible. Toute fonction  $f \in \mathfrak{H}$  peut être décomposée comme suit

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} W_f(b, a) \psi_{b,a}(t), \quad (2.9)$$

où l'égalité est vraie presque partout sur  $\mathbb{R}$  (convergence dans  $\mathfrak{H}$ ).

<sup>3</sup>Elle est suffisante à l'aide d'hypothèses de régularité supplémentaires imposées à  $\psi$ .

<sup>4</sup>Historiquement cependant, le terme est d'origine géophysique [Hub97].

Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans [Tor95].

La mesure  $\frac{db da}{a^2}$  apparaissant dans (2.9) est liée à la normalisation  $L^2$  des ondelettes  $\psi_{b,a}$ . Il s'agit de la mesure (de Haar) invariante à gauche du groupe affine  $G_{\text{aff}}$ . Notons que dans le cas de la normalisation  $L^1$ , cette mesure devient  $\frac{db da}{a}$ , en liaison avec la mesure de Haar invariante à droite de ce même groupe.

Sous les hypothèses du théorème, la relation présentée en (2.6) définit en réalité une isométrie

$$\begin{aligned} W_\psi : \quad \mathfrak{H} &\longrightarrow \mathfrak{G} \\ f &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle \psi_{b,a} | f \rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où  $\mathfrak{G} = L^2(G_{\text{aff}}, \frac{db da}{a^2})$ .

Il existe en effet une relation de Plancherel pour la CWT.

**Corollaire 2.1.** *Si  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $c_\psi < \infty$ , alors*

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} |W_f(b, a)|^2, \quad (2.11)$$

Ce corollaire, qui s'obtient moralement en projetant (2.9) sur  $f$ , exprime la conservation de l'énergie lors du changement de représentation. Il est donc clair que si  $f \in \mathfrak{H}$ ,  $W_f \in \mathfrak{G}$ , et inversement.

### 2.2.3 Redondance et noyau reproduisant

Le théorème de la section précédente exprime que l'isométrie définie en (2.10) est inversible uniquement sur son image. Cette dernière est loin d'être étendue à la totalité de  $\mathfrak{G}$ . Intuitivement cela semble évident puisque  $W_f$  *déplie* une fonction à un paramètre sur un espace à deux dimensions.

Pour bien comprendre ce fait, il faut introduire la notion de noyau reproduisant.

**Définition 2.2.** *Soit  $\psi \in \mathfrak{H}$  une ondelette admissible. Le noyau reproduisant associé est défini par*

$$K_\psi(b, a | b_0, a_0) = \frac{1}{c_\psi} \langle \psi_{b,a} | \psi_{b_0, a_0} \rangle, \quad (2.12)$$

pour  $(b, a), (b_0, a_0) \in G_{\text{aff}}$ .

Ce noyau correspond donc à la CWT de l'ondelette elle-même. En outre,

$$K_\psi(b, a | b_0, a_0) = K_\psi(0, 1 | \frac{b_0 - b}{a}, \frac{a_0}{a}), \quad (2.13)$$

grâce à la *covariance* de la transformée qui sera explicitée à la section suivante.

À ce noyau reproduisant est associé un opérateur intégral  $P_\psi$  tel que pour tout  $T \in \mathfrak{G}$ ,

$$[P_\psi T](b', a') = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} K_\psi(b, a | b', a') T(b, a). \quad (2.14)$$

Par la propriété (2.13), ce dernier correspond aussi à une convolution sur  $G_{\text{aff}}$ .

Le fait remarquable est que cet opérateur est *idempotent*, c.-à-d.  $P_\psi P_\psi T = P_\psi T$ . En effet,

$$\begin{aligned}
 [P_\psi P_\psi T](b'', a'') &= \frac{1}{c_\psi^2} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} \frac{db' da'}{a'^2} \\
 &\quad \langle \psi_{b', a'} | \psi_{b'', a''} \rangle \langle \psi_{b, a} | \psi_{b', a'} \rangle T(b, a) \\
 &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} T(b, a) \\
 &\quad \langle \psi_{b, a} | \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db' da'}{a'^2} \langle \psi_{b', a'} | \psi_{b'', a''} \rangle \psi_{b', a'} \rangle \\
 &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} T(b, a) \langle \psi_{b, a} | \psi_{b'', a''} \rangle \\
 &= [P_\psi T](b'', a'').
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

L'opérateur  $P_\psi$  est donc un projecteur sur l'espace  $\mathfrak{G}_\psi$  défini par

$$\mathfrak{G}_\psi = \{ T \in \mathfrak{G} : P_\psi T = T \}. \tag{2.16}$$

Par un raisonnement analogue à celui démontrant l'idempotence de  $P_\psi$ , remarquons aussi que  $W_f$  est la CWT d'une fonction  $f \in \mathfrak{H}$  ssi  $W_f \in \mathfrak{G}_\psi$ . En particulier,

$$W_f(b', a') = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{db da}{a^2} K_\psi(b, a | b', a') W_f(b, a). \tag{2.17}$$

Le redondance est donc clairement apparente puisque la valeur de la transformée en un point  $(b, a)$  de  $G_{\text{aff}}$  est complètement déterminée par l'ensemble des points du support de  $K_\psi(\cdot, \cdot | b, a)$ , lequel n'est pas ponctuel.

### 2.2.4 Covariance

La CWT est covariante sous l'action du groupe de symétries la définissant, en l'occurrence le groupe affine  $G_{\text{aff}}$ .

**Proposition 2.1.** *Pour  $u \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,*

$$(i) \text{ si } f(t) \mapsto T_u f(t) = f(t - u), \text{ alors } W_f(b, a) \mapsto W_f(b - u, a);$$

$$(ii) \text{ si } f(t) \mapsto D_\alpha f(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f\left(\frac{t}{\alpha}\right), \text{ alors } W_f(b, a) \mapsto W_f\left(\frac{b}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right).$$

Ceci découle directement du fait que

$$\langle U(b, a)\psi | U(u, \alpha)f \rangle = \langle U(u, \alpha)^{-1}U(b, a)\psi | f \rangle \tag{2.18}$$

$$= \langle U\left(\frac{b-u}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right)\psi | f \rangle, \tag{2.19}$$

par l'emploi de l'unitarité de la représentation  $U$ .

Selon cette proposition, la covariance du noyau reproduisant mentionnée en (2.13) est donc évidente.

### 2.2.5 Localisation et interprétation

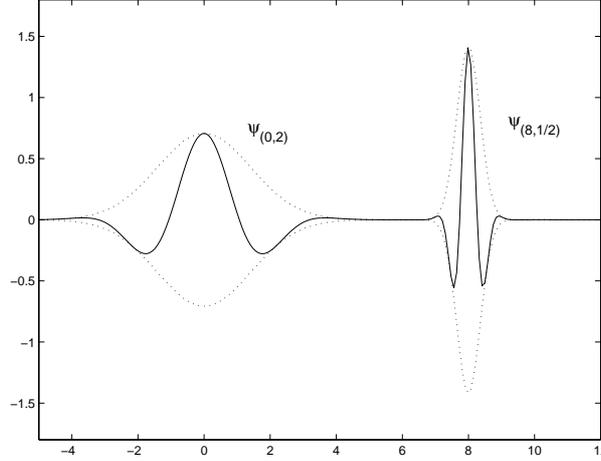


FIG. 2.1 – Localisation spatiale d'une ondelette

Idéalement, afin de donner une interprétation correcte de la CWT et d'assurer sa localité,  $\psi$  doit être bien localisée en position. Ceci s'obtient par exemple en exigeant que le support de  $\psi$  soit compact ou en demandant que  $\psi$  soit une fonction à décroissance rapide ( $\psi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ).

Dans ce cas, nous pouvons dire de  $W_f(b, a)$  qu'elle analyse le comportement de  $f$  au voisinage de  $b$  avec une localité proportionnelle à  $a$ .

Il existe aussi une lecture fréquentielle de la transformée. En effet, en utilisant (1.20),

$$\begin{aligned} W_f(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}(\xi) \sqrt{a} \hat{\psi}^*(a\xi) e^{ib\xi}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Imaginons que le support fréquentiel de  $\psi$ , c.-à-d. le support de  $\hat{\psi}$ , soit localisé autour d'une fréquence  $\xi_0$ . Dans ce cas,  $\hat{\psi}(a\xi)$  se concentre autour de  $\frac{\xi_0}{a}$ . La CWT observe donc le contenu fréquentiel de  $f$  au voisinage de  $\frac{\xi_0}{a}$ . Par conséquent,  $a^{-1}$  joue le même rôle qu'une fréquence : pour une large échelle,  $\psi_a$  est très étendue et explore les basses fréquences, tandis que pour de petites échelles,  $\psi_a$  est très localisée et observe les hautes fréquences (Fig. 2.1).

Cette constatation met en évidence le lien qui existe entre l'espace des paramètres de la CWT et l'inégalité de Fourier exprimée par

$$(\Delta_t f) (\Delta_\xi f) \geq \frac{1}{2}, \quad (2.21)$$

où  $\Delta_t f$  et  $\Delta_\xi f$  sont respectivement les étendues (ou variances) spatiale et fréquentielle d'une fonction  $f \in \mathfrak{H}$  [Mal98]. L'égalité survient par exemple pour une gaussienne  $f(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$  qui *sature* cette relation.

*Remarque 2.3.* Dans un cadre plus général, l'inégalité (2.21) est un cas particulier de la relation

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{i}{2} \langle [A, B] \rangle, \quad (2.22)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ ,  $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A \psi \rangle$  est la valeur moyenne de  $A$  dans l'état  $\psi \in \mathfrak{H}$ , et  $(\Delta_\psi A)^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2$  est l'*incertitude* sur  $A$  dans ce même état. La relation (2.21) est équivalente aux choix  $A = P$  et  $B = Q$ , respectivement les opérateurs de position et d'impulsion tels que  $Q\psi(x) = x\psi(x)$  et  $P\psi(x) = -i\frac{d}{dx}\psi(x)$ . L'interprétation physique de ce résultat mène alors au fameux *principe d'incertitude d'Heisenberg*.

### 2.2.6 Conditions sur $\psi$

Outre son admissibilité, il est parfois exigé de  $\psi$  qu'elle satisfasse des conditions auxiliaires.

Premièrement, comme mentionné à la section précédente, il est préférable que  $\psi$  soit bien localisée spatio-temporellement. L'information portée par  $W_f(b, a)$  est alors bien localisée sur la position  $b$  autour de la fréquence  $\frac{\xi_0}{a}$  si  $\xi_0$  est la fréquence principale de l'ondelette.

Deuxièmement,  $\psi$  peut être *progressive*, c.-à-d. telle que  $\hat{\psi}(\xi) = 0$  pour tout  $\xi < 0$  avec  $\hat{\psi}$  réelle. Dans ce cas, la reconstruction (2.9) cesse d'être valide<sup>5</sup> pour  $f \in \mathfrak{H}$ . Elle fonctionne cependant encore pour les fonctions appelées *signaux analytiques*, c.-à-d. pour les  $f \in \mathfrak{H}_a = \{f \in \mathfrak{H} : \hat{f}(\xi) = 0, \forall \xi < 0\}$ . Une telle ondelette permet par exemple d'estimer la fréquence instantanée d'un signal, ou encore de séparer ce dernier en différentes bandes spectrales [DEG92].

Finalement,  $\psi$  peut posséder  $n$  *moments* nuls, c.-à-d.

$$\int_{\mathbb{R}} dt t^m \psi(t) = 0, \quad \forall m < n. \quad (2.23)$$

Dans ce cas, l'ondelette sera "aveugle" aux comportements polynomiaux de degré  $n - 1$  du signal  $f$  dans le sens où les coefficients en ondelettes n'y seront pas sensibles. En effet, si (2.23) est respectée, pour tout polynôme  $p$  de degré  $n - 1$ ,

$$W_p(b, a) = \int_{\mathbb{R}} dt p(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.24)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt p(at+b) \sqrt{a} \psi^*(t) \quad (2.25)$$

$$= \sqrt{a} \left[ \int_{\mathbb{R}} dt p'(t) \psi(t) \right]^* \quad (2.26)$$

$$= 0, \quad (2.27)$$

<sup>5</sup>En modifiant la condition d'admissibilité (2.8) et en autorisant des échelles négatives dans la transformée en ondelettes (2.6) via une normalisation des ondelettes en  $|a|^{-\frac{1}{2}}$ , il est cependant possible de reconstruire toute fonction  $f \in \mathfrak{H}$  [Tor95].

où  $p'(t) = p(at + b)$  est un autre polynôme de degré  $n$ . Nous verrons au chapitre suivant que cette propriété se révèle particulièrement intéressante dans l'étude de la régularité de  $f$  et dans l'analyse de ses singularités.

### 2.2.7 Exemples d'ondelettes

La transformée de Fourier est universelle face aux signaux qu'elle décompose. A l'inverse, la transformée continue en ondelettes explore le contenu d'une fonction à l'aide d'une ondelette mère jouant véritablement le rôle d'une lentille d'observation. Cette dernière doit donc être choisie en fonction de la tâche à réaliser.

Citons premièrement la classe des ondelettes réelles. Un exemple est le chapeau Mexicain, ou ondelette de Marr, issu du laplacien d'une gaussienne,

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (2.28)$$

Il existe aussi la *différence de gaussiennes* (DOG<sup>6</sup>), définie par

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right), \quad (2.29)$$

où  $\alpha$  est généralement fixé<sup>7</sup> à 1.25.

Ces deux ondelettes possèdent respectivement deux et un moments nuls et sont particulièrement utiles pour la détection de singularités dans un signal. Elles s'avèrent également capables de fournir une information sur la régularité de la fonction analysée (cfr. chap. 3).

Il existe ensuite les ondelettes complexes, telle l'ondelette de *Morlet*. Celle-ci est obtenue par la modulation d'une gaussienne,

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) e^{i\xi_0 t} - \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2}\right), \quad (2.30)$$

Le dernier terme est un terme correctif négligeable pour  $\xi_0$  suffisamment grand (typiquement  $\xi_0 > 5.5$ ). Il s'agit d'une ondelette (numériquement) progressive car sa transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(\xi) = \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2}\right), \quad (2.31)$$

est négligeable sur les fréquences négatives.

### 2.2.8 Implémentation

En pratique, les fonctions analysées ne sont ni continues, ni infinies, c.-à-d. non définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier. La représentation d'un signal sur ordinateur est en général une séquence de valeurs résultant de l'*échantillonnage* de la fonction continue théorique (Sec. 1.1.3).

<sup>6</sup>Pour *Difference of Gaussians*.

<sup>7</sup>Pour cette valeur de  $\alpha$ , l'ondelette DOG est assez semblable à l'ondelette *chapeau mexicain* [Ant94].

Dans ce cas, les intégrales donnant lieu au calcul de la CWT deviennent des sommes de Riemann dont le calcul direct s'effectue en un temps non négligeable. Pour  $N$  positions et  $N_a$  échelles, il faudra de l'ordre de  $O(N^2 N_a)$  opérations d'additions-multiplications pour obtenir l'ensemble des  $W_f(b, a)$ .

Ce temps de calcul se réduit fortement en observant la formulation fréquentielle de la CWT donnée en (2.20), c.-à-d.

$$W_f(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}(\xi) \sqrt{a} \hat{\psi}^*(a\xi) e^{ib\xi}.$$

Les coefficients  $W_f(b, a)$  y sont représentés comme le résultat de la transformée de Fourier inverse du produit  $\hat{f}(\xi) \sqrt{a} \hat{\psi}^*(a\xi)$ .

Par conséquent, si  $f$  est une fonction à bande limitée, c.-à-d. si  $f \in \mathcal{B}_\pi$  en prenant une période d'échantillonnage  $T = 1$ , l'implémentation rapide de la transformée discrète de Fourier (FFT) permet le calcul de la CWT en  $O(NN_a \log N)$  opérations.

*Remarque 2.4.* Cette implémentation induit cependant une périodisation du signal  $f$  analysé après  $N$  valeurs. Par conséquent, des *effets de bord* apparaissent sur les extrémités de la transformée selon une étendue qui augmente avec l'échelle. En d'autres termes, la FFT périodise le signal et introduit de ce fait des singularités sur les bords de ce dernier.

*Remarque 2.5.* L'*hypothèse du continu* implicitement réalisée, c.-à-d. le fait que la CWT est correctement évaluée par des calculs discrets, n'est valable que pour une certaine gamme d'échelles. En effet, pour obtenir les coefficients  $W_f(b, a)$  au moyen d'une FFT inverse, il faut, d'une part,  $\psi_a \in \mathcal{B}_\pi$ , c.-à-d.

$$\text{ess sup} (\hat{\psi}(a\xi)) \subset [-\pi, \pi],$$

et d'autre part, que la taille de  $\text{supp}(\psi_a)$  soit inférieure à la largeur  $N$  du signal  $f$ .

Ceci définit un intervalle d'échelles  $[a_m, a_M] \subset \mathbb{R}_+^*$  propre à l'ondelette  $\psi$  tel que, si  $a < a_m$ ,  $\psi_a$  n'est pas suffisamment échantillonnée, et si  $a > a_M$ ,  $\psi_a$  est plus grande que le signal analysé.

## 2.3 Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

### 2.3.1 Définition

Soit une fonction,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  d'énergie finie, c.-à-d.  $f \in \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ . Comme mentionné au chapitre 1, celle-ci peut représenter une *image*<sup>8</sup>, c.-à-d. l'association d'un point de  $\mathbb{R}^2$  à un niveau d'intensité lumineuse.

Les transformations que nous souhaitons appliquer à  $f$  sont : les translations par un vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(\vec{x}) \rightarrow [T_{\vec{u}}f](\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{u}), \quad (2.32)$$

<sup>8</sup>En niveaux de gris ou monochrome.

les dilatations d'un facteur  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(\vec{x}) \rightarrow [D_a f](\vec{x}) = f(a^{-1} \vec{x}), \quad (2.33)$$

et les rotations d'un angle  $\theta \in S^1$

$$f(\vec{x}) \rightarrow [R_\theta f](\vec{x}) = f(r_\theta^{-1} \vec{x}), \quad (2.34)$$

avec la matrice de rotation  $r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Ces trois transformations forment le groupe de similitude  $\text{SIM}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ .

**Définition 2.3.** Une ondelette  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$  est dite admissible sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  si

$$c_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \frac{|\hat{\psi}(\vec{k})|^2}{\|\vec{k}\|^2} < \infty. \quad (2.35)$$

Sous certaines hypothèses de régularité additionnelles, c.-à-d. si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ , cette condition se simplifie en

$$\hat{\psi}(\vec{0}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \psi \rangle = 0. \quad (2.36)$$

Notons en outre que les transformations de  $\text{SIM}(2)$  décrites plus haut ne modifient pas le caractère admissible d'une fonction.

**Définition 2.4.** Soit  $\psi$  une ondelette admissible. La transformée continue en ondelettes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est la donnée des coefficients

$$W_f(\vec{b}, a, \theta) = \langle \psi_{\vec{b}, a, \theta} | f \rangle, \quad (2.37)$$

avec

$$\psi_{\vec{b}, a, \theta}(\vec{x}) = \frac{1}{a^{3-n}} \psi(r_\theta^{-1} \frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}), \quad (2.38)$$

et pour  $n = 1$  ou  $2$  respectivement en normalisation  $L^1$  ou  $L^2$  des ondelettes ainsi définies.

Comme dans le cas unidimensionnel, nous travaillerons par la suite en normalisation  $L^2$ . Si l'ondelette  $\psi$  est bien localisée autour de l'origine, un coefficient en ondelettes  $W_f(\vec{b}, a, \theta)$  s'interprète comme l'analyse du contenu de la fonction  $f$  au voisinage du point  $\vec{b}$ , avec une localité proportionnelle à  $a$  et selon une orientation  $\theta$ .

*Remarque 2.6.* Il est possible d'ajouter d'autres transformations dans la définition des coefficients en ondelettes en perdant la réalisation de groupe décrite précédemment. Nous pouvons par exemple introduire une dilatation anisotrope de paramètres  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$  telle que [VF01]

$$f(\vec{x}) \rightarrow [D_{a_1 a_2} f](\vec{x}) = f(d_{a_1 a_2}^{-1} \vec{x}), \quad (2.39)$$

avec la matrice d'anisotropie

$$d_{a_1 a_2} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Dans ce cas, les coefficients sont

$$W_f(\vec{b}, a_1, a_2, \theta) = \langle \psi_{\vec{b}, a_1, a_2, \theta} | f \rangle, \quad (2.41)$$

avec  $\psi_{\vec{b}, a_1, a_2, \theta} = T_{\vec{b}} D_{a_1 a_2} R_{\theta} \psi$ .

Ceci est, par exemple, employé au chapitre 3 pour caractériser la régularité directionnelle d'une fonction. Nous verrons que le cas idéal pour cette analyse est de prendre  $a_1 \ll a_2$ .

**Proposition 2.2.** *Soit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$  une ondelette admissible. Toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  peut être reconstruite sur base de ses coefficients en ondelettes au moyen de la formule de reconstruction suivante*

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{\text{SIM}(2)} d^2 \vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta W_f(\vec{b}, a, \theta) \psi_{\vec{b}, a, \theta}(\vec{x}), \quad (2.42)$$

valable presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

La mesure  $d^2 \vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta$  apparaissant dans l'intégration (2.46) est la mesure de Haar invariante à gauche de  $\text{SIM}(2)$ . Pour la normalisation  $L^1$  des ondelettes ( $n = 1$  dans (2.38)), celle-ci doit être remplacée par la mesure invariante à droite  $d^2 \vec{b} \frac{da}{a} d\theta$ .

**Proposition 2.3.** *Pour toute ondelette admissible  $\psi$ , et toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , l'application*

$$\begin{aligned} W_{\psi} : \quad L^2(\mathbb{R}^2, d^2 \vec{x}) &\longrightarrow L^2(\text{SIM}(2), d\vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta) \\ f &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{c_{\psi}}} \langle \psi_{\vec{b}, a, \theta} | f \rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

est une isométrie, et

$$\|f\|^2 = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{\text{SIM}(2)} d^2 \vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta |W_f(\vec{b}, a, \theta)|^2. \quad (2.44)$$

*Remarque 2.7.* Si l'ondelette  $\psi$  est isotrope, c.-à-d. si  $\psi(\vec{x}) = \psi(r_{\alpha} \vec{x})$  pour tout  $\alpha \in S^1$ , alors l'intégration angulaire est éliminée des formules précédentes. Autrement dit, pour une ondelette isotrope  $\psi$  telle que

$$c_{\psi} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \frac{|\hat{\psi}(\vec{k})|^2}{\|\vec{k}\|^2} < \infty, \quad (2.45)$$

les coefficients en ondelettes sont  $W_f(\vec{b}, a) = \langle \psi_{\vec{b}, a} | f \rangle$ , et la reconstruction devient

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*} d^2 \vec{b} \frac{da}{a^3} W_f(\vec{b}, a) \psi_{\vec{b}, a}(\vec{x}), \quad (2.46)$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.3.2 Propriétés

Tout comme à une dimension, la transformée en ondelettes est *covariante* sous toute action de SIM(2) sur la fonction analysée.

**Proposition 2.4.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Pour  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\varphi \in S^1$ ,

- (i) si  $f(\vec{x}) \mapsto T_{\vec{u}}f(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{u})$ , alors  $W_f(\vec{b}, a, \theta) \mapsto W_f(\vec{b} - \vec{u}, a, \theta)$ ;
- (ii) si  $f(\vec{x}) \mapsto D_{\alpha}f(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}f(\frac{\vec{x}}{\alpha})$ , alors  $W_f(\vec{b}, a, \theta) \mapsto W_f(\frac{\vec{b}}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}, \theta)$ ;
- (iii) si  $f(\vec{x}) \mapsto R_{\varphi}f(\vec{x}) = f(r_{\varphi}^{-1}\vec{x})$ , alors  $W_f(\vec{b}, a, \theta) \mapsto W_f(r_{\varphi}^{-1}\vec{b}, a, \theta - \varphi)$ .

Un noyau reproduisant est également défini par

$$K(\vec{b}', a', \theta' | \vec{b}, a, \theta) = \frac{1}{c_{\psi}} \langle \psi_{\vec{b}', a', \theta'} | \psi_{\vec{b}, a, \theta} \rangle. \quad (2.47)$$

L'opérateur intégral  $P_{\psi} : L^2(\text{SIM}(2)) \rightarrow L^2(\text{SIM}(2))$  tel que

$$P_{\psi}F(\vec{b}', a', \theta') = \int_{\text{SIM}(2)} d^2\vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta K(\vec{b}', a', \theta' | \vec{b}, a, \theta) F(\vec{b}, a, \theta). \quad (2.48)$$

permet alors d'établir que  $F \in L^2(\text{SIM}(2))$  est la transformée en ondelettes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ssi  $F$  vérifie la condition de reproductibilité  $P_{\psi}F = F$ . Dans ce contexte,  $P_{\psi}$  est le projecteur orthogonal de  $L^2(\text{SIM}(2))$  sur l'image de la  $W_{\psi}$ .

### 2.3.3 Conditions sur $\psi$

Outre son caractère admissible essentiel à la phase de reconstruction de la fonction analysée, il est important que l'ondelette soit bien localisée spatialement et fréquentiellement. Comme dans le cas unidimensionnel, ceci garantit une bonne interprétation des coefficients  $W_f$ .

Lorsque que la CWT est utilisée pour analyser la *régularité* d'une fonction  $f$ , il est généralement demandé que  $\psi$  ait  $n$  moments nuls, c.-à-d.

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} x^{\alpha} y^{\beta} \psi(\vec{x}) = 0, \quad \forall 0 \leq \alpha + \beta < n. \quad (2.49)$$

Dans ce cas,  $W_f$  sera nul sur toute composante de  $f$  présentant un comportement polynomial d'ordre  $n - 1$ , c.-à-d. sur le développement de Taylor d'ordre  $n - 1$  de  $f$ .

Afin de détecter des objets très orientés au sein de  $f$ , il est commode de prendre une ondelette  $\psi$  *directionnelle*, c.-à-d. dont le support fréquentiel est essentiellement contenu dans un cône convexe dont le sommet se trouve sur l'origine [AMV99]. Dans ce cas, si  $f$  contient par exemple une droite d'orientation  $\alpha$  passant par un point  $\vec{u}$ , la réponse des coefficients  $W_f(\vec{u}, a, \theta)$  est d'autant plus étroite autour de la direction  $\theta = \alpha$  que le cône supportant  $\hat{\psi}$  est étroit. Les ondelettes *coniques* présentées à la section suivante sont des ondelettes directionnelles.

### 2.3.4 Ondelettes isotropes, directionnelles et endstopped

Il existe une multitude d'ondelettes bidimensionnelles, chacune adaptée à une ou plusieurs tâches.

Mentionnons premièrement la catégorie des ondelettes isotropes telles que  $\psi(r_\alpha \vec{x}) = \psi(\vec{x})$  pour tout  $\alpha \in S^1$ . L'ondelette chapeau mexicain, ou ondelette de Marr [Mar82], définie par

$$\psi(\vec{x}) = (2 - \|\vec{x}\|^2) \exp\left(-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}\right), \quad (2.50)$$

ainsi que l'ondelette différence de gaussiennes, ou DOG, telle que

$$\psi(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}\right) - \frac{1}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\alpha^2}\right), \quad (2.51)$$

avec  $\alpha > 1$ , présentent cette propriété. Le chapeau mexicain est par exemple employé en astrophysique pour la détection de sources de rayons gamma avec des niveaux de comptage de photon très faibles [DMM97].

Une autre classe d'ondelettes est celle des ondelettes *directionnelles*. Celles-ci sont telles que leur support fréquentiel est essentiellement contenu dans un cône convexe pointé sur l'origine. La généralisation bidimensionnelle de l'ondelette de *Morlet* définie par

$$\psi(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\sigma^2}\right) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} + \exp\left(-\frac{\sigma^2 \|\vec{k}\|^2}{2}\right) \quad (2.52)$$

avec  $\vec{k}_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ , répond à ce critère. Le dernier terme de (2.52) est de nouveau un terme correctif qui disparaît pour  $\sigma \|\vec{k}_0\| > 5.5$ . La capacité de cette ondelette à détecter des objets orientés, tel des segments de droite, peut être calibrée [AMV04].

Une ondelette directionnelle est dite *conique* si son support fréquentiel exactement contenu dans un cône. L'ondelette de *Cauchy* définie par

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \begin{cases} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi)^l (\vec{k} \cdot \vec{e}_{-\varphi})^m e^{-\vec{k} \cdot \vec{\eta}}, & \text{si } \vec{k} \in \mathcal{C}(-\varphi, \varphi), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.53)$$

avec  $\vec{e}_\rho = (\cos \rho, \sin \rho)$  pour  $\rho \in S^1$ ,  $\vec{\eta} = (\eta, 0)$  avec  $\eta > 0$ , et  $\mathcal{C}(-\varphi, \varphi) = \{\vec{k} \in \mathbb{R}^2 : |\arg \vec{k}| \leq \varphi\}$ , possède par construction cette propriété. Les paramètres  $l$  et  $m$  contrôlent la régularité de  $\psi$  sur les bords du cône  $\mathcal{C}$ .

L'exponentielle décroissante présente en (2.53) peut être remplacée par un comportement gaussien mieux localisé radialement. Ceci conduit à l'ondelette *conique gaussienne* suivante

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \begin{cases} (\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi)^l (\vec{k} \cdot \vec{e}_{-\varphi})^m e^{-\sigma \frac{(k_x - \chi(\sigma))^2}{2}}, & \vec{k} \in \mathcal{C}(-\varphi, \varphi), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.54)$$

pour  $\sigma > 0$  et avec  $\chi(\sigma) = \frac{\sigma-1}{\sigma} \sqrt{l+m}$ . Le paramètre  $\sigma$  contrôle l'étendue radiale de  $\hat{\psi}$  autour du vecteur  $(\sqrt{l+m}, 0)$ .

Cette ondelette est par exemple employée comme détecteur de symétrie sous dilatation-rotation dans des motifs a périodiques (quasi-périodiques) dépourvus d'invariance sous translation discrète mais possédant des symétries (statistiques [Rad95]) sous rotation et dilatation discrètes [AJT99].

Une dernière sous-classe d'ondelettes directionnelles est celle des ondelettes dites *endstopped*. Ces ondelettes, découvertes par S. K. Bhattacharjee [Bha99], ont la capacité de détecter les extrémités de segments de droite (endstopped de premier type) ou la longueur de ceux-ci (endstopped du second type). Elles imitent en réalité le comportement de certaines cellules, dites *endstopped cells*, de la rétine des mammifères lors du phénomène de vision à bas niveau<sup>9</sup> [Hub88].

L'ondelette endstopped du premier type est obtenue par différentiation de l'ondelette de Morlet dans une direction perpendiculaire à son vecteur fréquentiel principal  $\vec{k}_0 = (k_0, 0)$  :

$$\psi(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial y} [\exp(-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}], \quad (2.55)$$

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = -2\pi\sigma^2 i k_y \exp(-\frac{1}{2}\|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2), \quad (2.56)$$

Pour l'ondelette endstopped du second type, une dérivation du second ordre est réalisée sur l'ondelette de Morlet dans une direction perpendiculaire à  $\vec{k}_0$  de sorte que

$$\psi(\vec{x}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\exp(-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}], \quad (2.57)$$

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = -2\pi\sigma^2 k_y^2 \exp(-\frac{1}{2}\|\vec{k} - \vec{k}_0\|^2). \quad (2.58)$$

### 2.3.5 Implémentation

Tout comme le cas unidimensionnel, les fonctions analysées par la transformée en ondelettes sont en réalité discrétisées sur une grille de positions (Sec. 1.2). Supposons un période d'échantillonnage unitaire avec  $\text{supp}(f) \subset [0, N[ \times [0, N[$ .

En remarquant que

$$W_f(\vec{b}, a, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{f}(\vec{k}) \hat{\psi}^*(a r_\theta^{-1} \vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (2.59)$$

les valeurs  $W_f$  s'obtiennent par la transformée de Fourier inverse du produit  $\hat{f}(\vec{k}) \hat{\psi}^*(a r_\theta^{-1} \vec{k})$ .

L'emploi de la FFT à deux dimensions permet alors le calcul des  $W_f(\vec{b}, a, \theta)$  en  $O(N^2 \times \log^2 N)$  opérations pour  $a$  et  $\theta$  fixés. Le prix à payer est encore une fois la périodisation de la fonction  $f$  dans les directions des axes  $x$  et  $y$ , ce qui induit des effets de bord dans les coefficients en ondelettes.

En outre, comme à une dimension, l'hypothèse du continu n'est vérifiée que sur une certaine gamme d'échelles  $[a_m, a_M] \subset \mathbb{R}_+^*$  liée intrinsèquement à  $\psi$ , et telle que

$$\text{ess sup}(\hat{\psi}_a) \subset [-\pi, \pi[ \times [-\pi, \pi[, \quad (2.60)$$

$$\text{ess sup}(\psi_a) \subset [0, N[ \times [0, N[, \quad (2.61)$$

<sup>9</sup>Autrement dit, sans intervention du cerveau.

pour tout  $a \in [a_m, a_M]$ .

En dehors de celle-ci, soit les ondelettes  $\psi_{\vec{b}, a, \theta}$  ne sont pas assez échantillonnées ( $a < a_m$ ), soit  $\psi_a$  devient plus grande que le support de la fonction  $f$  ( $a > a_M$ ).

## 2.4 Transformée continue en ondelettes sur la sphère

### 2.4.1 Introduction

Il existe actuellement une forte demande dans tous les domaines touchant à la manipulation de données sphériques pour étudier celles-ci avec une vision “multi-échelle”. Citons par exemple les applications géophysiques [FMZ03], astrophysiques (analyse du bruit de fond cosmique [CSB00, CSM01]), médicales (détection d’axones dans le cerveau humain [HTJ03], analyse d’*électro-encéphalogrammes*) et la vision omnidirectionnelle [Dan00].

### 2.4.2 Principes

De la même manière que ses soeurs unidimensionnelle et plane, la transformée continue en ondelettes sur la sphère (SCWT<sup>10</sup>) est établie à partir de certaines transformations affines de  $S^2$ , à savoir l’association d’une rotation définie par un élément  $\rho$  du groupe  $SO(3)$  et d’une dilatation (stéréographique) paramétrisée par une échelle  $a \in \mathbb{R}_+^*$  [AMV04, ADJ01].

La rotation jouera ici le double rôle du paramètre de translation et de rotation présents à deux dimensions pour l’analyse des fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Autrement dit, une fonction  $f \in L^2(S^2) \equiv L^2(S^2, d\mu)$ , avec  $d\mu(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi$  la mesure de Lebesgue sur la sphère, peut se transformer sous l’action

- d’une rotation  $R_\rho$  ( $\rho \in SO(3)$ ) :

$$(R_\rho f)(\omega) = f(\rho^{-1}\omega), \quad (2.62)$$

où  $\omega = (\theta, \phi)$  ;

- d’une dilatation stéréographique  $D_a$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ) :

$$(D_a f)(\omega) = \lambda(a, \theta)^{\frac{1}{2}} f(\omega_{\frac{1}{a}}), \quad (2.63)$$

où  $\omega_a = (\theta_a, \varphi)$  avec  $\tan \frac{\theta_a}{2} = a \tan \frac{\theta}{2}$ , et  $\lambda$  est un facteur de normalisation associé au *cocycle* exprimant la non-invariance de la mesure  $d\mu$  sous dilatation. Ce facteur  $\lambda$  est donné par

$$\lambda(a, \theta) = \frac{4a^2}{[(a^2 - 1) \cos(\theta) + (a^2 + 1)]^2}. \quad (2.64)$$

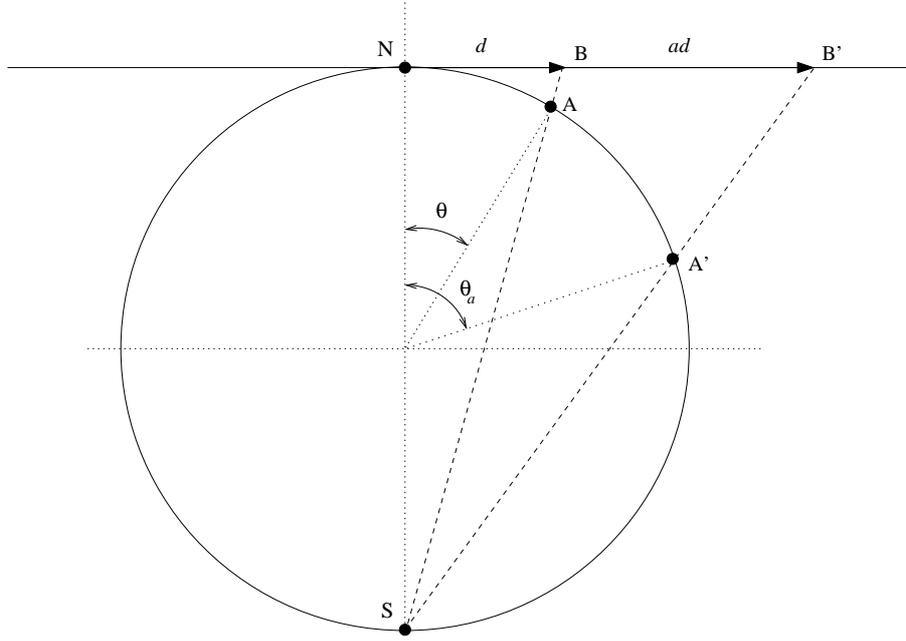


FIG. 2.2 – Représentation visuelle de la dilatation stéréographique.

Intuitivement, l'action de la dilatation  $D_a$  sur  $f \in L^2(S^2)$  correspond, dans l'ordre, à la projection stéréographique de  $f$  sur le plan tangent au pôle nord de la sphère, à la dilatation “plane” d'un facteur  $a$  de cette fonction projetée, et au retour sur la sphère de cette nouvelle fonction par projection stéréographique inverse. Ce processus est illustré sur la Figure 2.2 par la détermination de l'image  $A'$  d'un point  $A$  sous dilatation  $D_a$ .

Techniquement, ces deux transformations affines, bien que non commutantes et non génératrices d'un groupe, peuvent être incorporées dans le groupe conforme de  $S^2$  à savoir le groupe de Lorentz  $SO_0(3, 1)$  au moyen de la décomposition d'Iwasawa [AV99]. L'intérêt de cette démarche est que  $SO_0(3, 1)$  possède une représentation unitaire irréductible dans  $L^2(S^2)$  donnant lieu à une représentation carré-intégrable sur  $\mathbb{R}_*^+ \times SO(3)$ . Ce point permet alors la construction d'une transformée en ondelettes sur  $S^2$  en employant les mêmes techniques que celles développées sur la droite ou sur le plan [AAG00].

### 2.4.3 Ondelettes sphériques

Dans le schéma décrit à la section précédente, une ondelette  $\psi \in L^2(S^2)$  sera dite *admissible*<sup>11</sup>, s'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}_+^*$  telle que, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < G_\psi(l) = \frac{8\pi^2}{2l+1} \sum_{|m| \leq l} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{da}{a^3} |\hat{\psi}_a(l, m)|^2 < c, \quad (2.65)$$

<sup>10</sup>Pour *Spherical Continuous Wavelet Transform*.

<sup>11</sup>C'est à dire qu'elle sera un vecteur admissible pour la représentation du groupe de Lorentz  $SO_0(3, 1)$  mentionné plus haut.

avec  $\hat{\psi}_a(l, m) = \langle Y_l^m | \psi_a \rangle$  la transformée en *harmonique sphérique*<sup>12</sup> de  $\psi_a = D_a \psi$ .

Une condition plus simple à manipuler et presque équivalente à (2.65) est d'imposer que [Van98]

$$\int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) \frac{\psi(\theta, \varphi)}{1 + \cos \theta} = 0, \quad (2.66)$$

condition homologue à l'annulation de la moyenne des ondelettes planes.

En remarquant que

$$\int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) \frac{D_a \psi(\theta, \varphi)}{1 + \cos \theta} = a \int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) \frac{\psi(\theta, \varphi)}{1 + \cos \theta}, \quad (2.67)$$

la condition (2.66) permet de créer toute une classe d'ondelettes admissibles de la forme

$$\psi(\theta, \varphi) = \phi(\theta, \varphi) - \frac{1}{\alpha} D_\alpha \phi(\theta, \varphi), \quad (2.68)$$

pour une certaine fonction  $\phi \in L^2(S^2)$ .

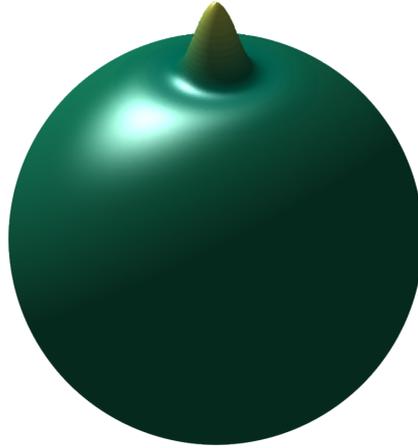


FIG. 2.3 – L'ondelette DOG pour  $\alpha = 1.25$  dilatée de  $a = 0.1$ .

En particulier, pour  $\phi = \exp(-\tan^2(\frac{1}{2}\theta))$ , c.-à-d. la projection stéréographique inverse de la gaussienne sur la sphère, nous obtenons l'ondelette sphérique *DOG*<sup>13</sup>

$$\psi(\theta, \varphi) = \exp(-\tan^2(\frac{1}{2}\theta)) - \frac{1}{\alpha} \lambda(\alpha, \theta)^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{\alpha^2} \tan^2(\frac{1}{2}\theta)), \quad (2.69)$$

dont une représentation dilatée d'un facteur  $a = 0.1$  est donnée sur la Figure 2.3.

<sup>12</sup>Nommée également transformée de Fourier sur  $S^2$ .

<sup>13</sup>Pour *Difference of Gaussians*.

### 2.4.4 Définition et propriétés de la SCWT

Etant donné un élément  $\rho \in SO(3)$ , une dilatation  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et une ondelette admissible  $\psi \in L^2(S^2)$ , la transformée continue en ondelettes sphériques (SCWT) d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  est constituée par les coefficients

$$W_f(\rho, a) = \langle \psi_{\rho, a} | f \rangle = \int_{S^2} d\mu(\omega) [R_\rho D_a \psi]^*(\omega) f(\omega). \quad (2.70)$$

Malheureusement, cette transformation n'est pas complètement *covariante* sous l'action des rotations et dilatations. En effet :

- *sous rotation*, si  $f$  est modifiée par un élément  $\rho' \in SO(3)$ , nous avons

$$W_{R_{\rho'} f}(\rho, a) = \langle \psi_{\rho, a} | R_{\rho'} f \rangle = \langle R_{\rho'}^{-1} R_\rho D_a \psi | f \rangle = W_f(\rho'^{-1} \rho, a), \quad (2.71)$$

- *et sous dilatation*, si  $f$  est dilatée d'un facteur  $a' \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$W_{D_{a'} f}(\rho, a) = \langle \psi_{\rho, a} | D_{a'} f \rangle = \langle D_{a'}^{-1} R_\rho D_a \psi | f \rangle, \quad (2.72)$$

et cette dernière égalité ne peut être simplifiée car  $R_\rho$  ne commute pas avec  $D_{a'}$ .

Les coefficients donnés en (2.70) sont également le résultat d'une *corrélation sphérique* entre  $\psi_a$  et  $f$  au sens développé en 1.3.2.

Autrement dit,

$$W_f(\rho, a) = (\psi_a \star f)(\rho). \quad (2.73)$$

En outre, si l'ondelette  $\psi$  est *axisymétrique* (ou *zonale*), c.-à-d. si  $\psi(\theta, \varphi) = \psi(\theta)$ , puisque que la dilatation stéréographique est radiale autour du pôle nord, la transformée continue en ondelette se réduit à la définition

$$W_f(\omega, a) = (\psi_a \star f)([\omega]) \equiv (\psi_a \star f)(\omega), \quad (2.74)$$

avec  $[\omega] = \rho(\varphi, \theta, 0) \in SO(3)$  en paramétrisation Eulerienne, et où l'opération  $\star$  est la corrélation réduite à  $S^2$  définie en (1.63).

### 2.4.5 Reconstruction

La reconstruction d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  sur base des coefficients  $W_f$  est un peu particulière. En effet, si l'ondelette  $\psi$  est telle que  $\int_{S^2} d\varphi \psi(\theta, \varphi) \neq 0$ , alors la famille  $\{\psi_{\rho, a} : \rho \in SO(3), a \in \mathbb{R}_+^*\}$  constitue un repère continu de  $L^2(S^2)$ . Autrement dit, il existe deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles que pour toute fonction  $f \in L^2(S^2)$ ,

$$A \|f\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{dad\nu(\rho)}{a^3} |\langle \psi_{\rho, a} | f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (2.75)$$

avec  $d\nu$  la mesure (de Haar) invariante sur  $SO(3)$ . En conséquence, nous pouvons énoncer la proposition suivante [ADJ01].

**Proposition 2.5.** *Soit  $f \in L^2(S^2)$ . Si  $\psi$  est une ondelette admissible telle que  $\int_{S^1} d\varphi \psi(\theta, \varphi) \neq 0$ , alors*

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{dad\nu(\rho)}{a^3} W_f(\rho, a) [R_\rho L_\psi^{-1} D_a \psi](\omega), \quad (2.76)$$

où les coefficients  $W_f(\rho, a)$  sont donnés par (2.70), et  $L$  est l'opérateur de repère (auto-adjoint) défini en Fourier par

$$[\widehat{L_\psi h}](l, m) = G_\psi(l) \hat{h}(l, m), \quad \forall h \in L^2(S^2), \quad (2.77)$$

avec  $G_\psi(l)$  déterminé par (2.65).

La preuve de cette proposition, dont le schéma général nous sera utile dans la suite, figure à l'annexe A (Sec. A.2, p. 160).

Précisons que cet opérateur de repère continu est défini en position par

$$L_\psi f(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{dad\nu(\rho)}{a^3} W_f(\rho, a) \psi_{\rho, a}(\omega), \quad (2.78)$$

et (2.75) équivaut à l'encadrement

$$A\mathcal{I} \leq L_\psi \leq B\mathcal{I}, \quad (2.79)$$

où  $\mathcal{I}$  est l'opérateur identité.

**Corollaire 2.2.** *Sous les conditions de la proposition précédente, la relation de Plancherel suivante est satisfaite*

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{dad\nu(\rho)}{a^3} W_f(\rho, a) \tilde{W}_f^*(\rho, a), \quad (2.80)$$

avec

$$\tilde{W}_f(\rho, a) = \langle \tilde{\psi}_{\rho, a} | f \rangle = \langle R_\rho L_\psi^{-1} D_a \psi | f \rangle. \quad (2.81)$$

Ce corollaire s'obtient directement en projetant (2.78) sur  $f$ .

La formule de reconstruction dans le cas d'une ondelette axisymétrique est fournie par le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3.** *Si  $\psi$  est une ondelette axisymétrique, alors, pour toute fonction  $f \in L^2(S^2)$ ,*

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{S^2} \frac{dad\mu(\omega')}{a^3} W_f(\omega', a) \tilde{\psi}_{\omega, a}(\omega'), \quad (2.82)$$

avec  $\tilde{\psi}_{\omega, a} = R_{\bar{\omega}} L_\psi^{-1} D_a \psi$ , et  $L_\psi$  l'opérateur de repère tel que

$$[\widehat{L_\psi^{-1} \psi_a}](l, m) = \left[ \frac{4\pi}{2l+1} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{da}{a^3} |\hat{\psi}_a(l, 0)|^2 \right]^{-1} \hat{\psi}_a(l, 0) \delta_{0, m}. \quad (2.83)$$

Ce corollaire est prouvé à l'annexe A (Sec. A.2, p. 161).

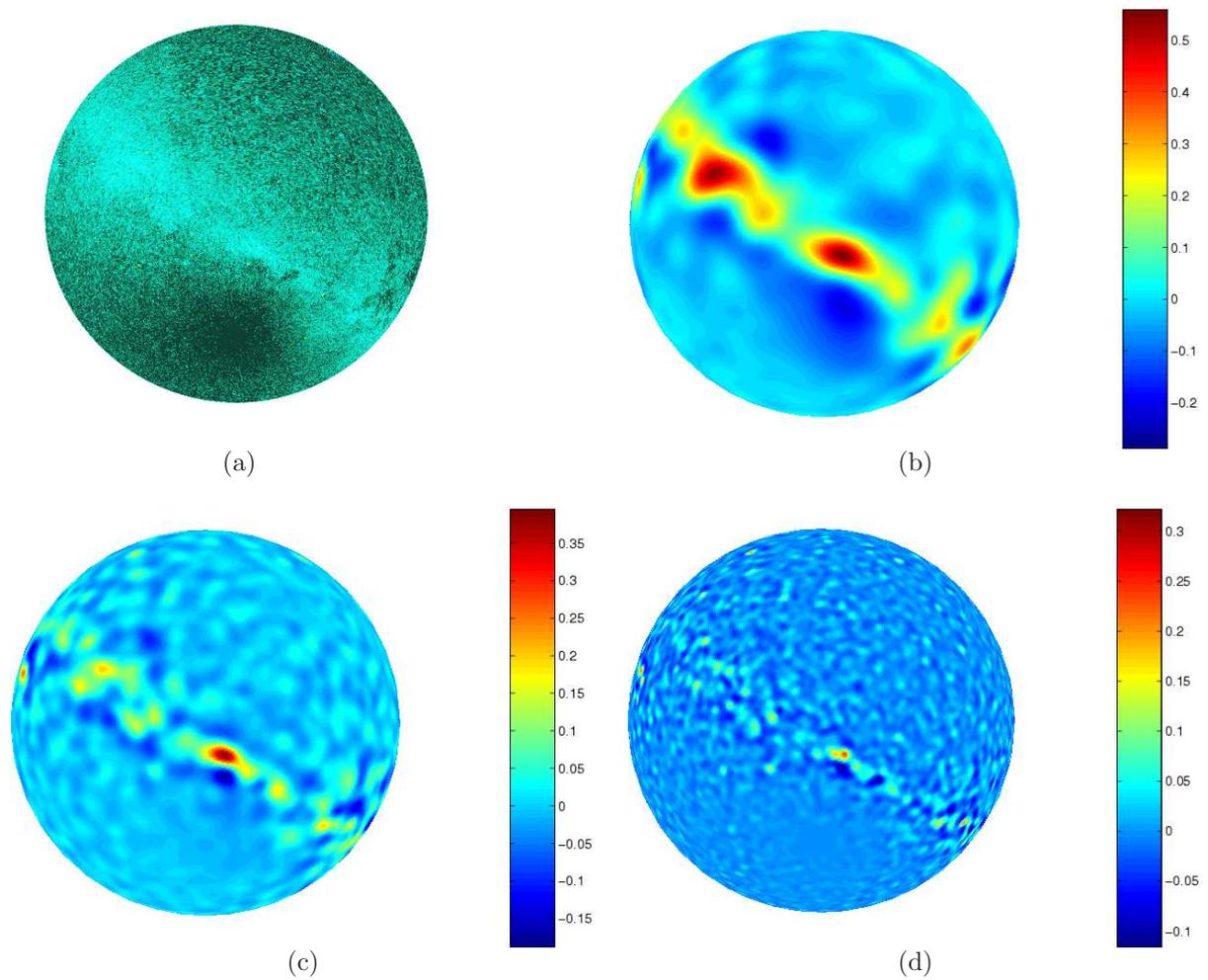


FIG. 2.4 – Analyse d’une cartographie du ciel obtenue par le satellite Hipparcos pour la mission Tycho [Hip]. (a) Image originale (nombre d’étoiles  $> 1\ 10^6$ ). (b)  $W_f(\omega, 0.08)$ . (c)  $W_f(\omega, 0.04)$ . (d)  $W_f(\omega, 0.02)$ .

### 2.4.6 Implémentation $\square$

Seule l'implémentation relative à l'emploi des ondelettes axisymétriques est traitée dans cette section. Pour une implémentation plus générale incluant des ondelettes sphériques directionnelles, nous référons le lecteur à [ADJ01].

L'équation (2.74) nous fournit une réécriture de la SCWT sous la forme d'une corrélation sphérique entre l'ondelette dilatée  $\psi_a$  et la fonction analysée  $f$ . Comme décrit à la section 1.3.2, cette corrélation s'exprime très simplement en Fourier de sorte que

$$\widehat{(\psi_a \star f)}(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{\psi}_a^*(l, 0) \hat{f}(l, m), \quad \forall (l, m) \in \mathcal{N}, \quad (2.84)$$

Par conséquent, pour chaque échelle  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , une détermination rapide des coefficients de la SCWT peut être réalisée. En effet, si la fonction  $f \in L^2(S^2)$  est initialement discrétisée sur une grille équi-angulaire  $\mathcal{G}_B$  de taille  $2B \times 2B$  (cfr. 1.65), en supposant que  $f$  et  $\psi_a$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{B}_B$  défini en (1.66), les calculs de  $\hat{f}$ ,  $\hat{\psi}_a$  et de la transformée inverse de  $\widehat{(\psi_a \star f)}$  sont réalisables rapidement à l'aide de l'algorithme de J.R. Driscoll et D. M. Healy [DH94].

Une implémentation libre<sup>14</sup> de ce dernier, nommée *SpharmonicKit*, est d'ailleurs disponible [SK]. Dans le cadre de cette thèse, les routines C correspondantes ont été interfacées avec la toolbox Matlab© YAWTB [Yaw] (cfr. annexe C) afin de fournir un outil simple et pédagogique pour le calcul de la SCWT.

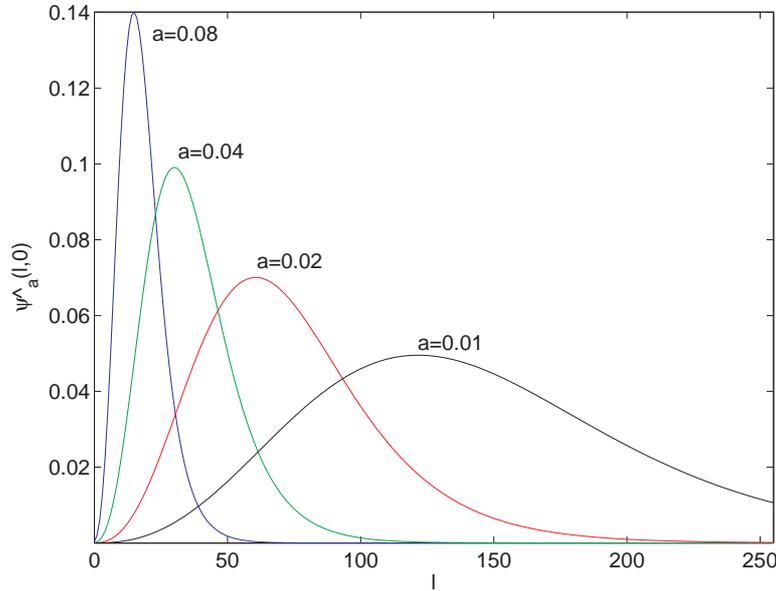


FIG. 2.5 – Comportement de  $\hat{\psi}_a(l, 0)$  en fonction de l'échelle  $a$ . Pour  $a = 0.01$ , l'ondelette  $\psi_a$  possède une largeur de bande supérieure à celle permise par une grille  $512 \times 512$  ( $B = 256$ ).

<sup>14</sup>Autrement dit sous licence GPL (General Public License [Gpl]).

A titre d'exemple, nous avons analysé les données sphériques du catalogue d'étoiles Tycho obtenu par le satellite Hipparcos [Hip]. Il s'agit de la répartition de plus d'un million d'étoiles discrétisée ici sur une grille équi-angulaire sphérique  $512 \times 512$  ( $B = 256$ ) (Fig. 2.4(a)). La Voie Lactée est clairement apparente sur cette représentation sous la forme d'une bande oblique où la densité d'étoiles est plus importante.

La SCWT de ces données a été réalisée à l'aide de l'ondelette sphérique DOG pour trois échelles :  $a = 0.08$  (Fig. 2.4(b)) (Fig. 2.4(b)),  $a = 0.04$  (Fig. 2.4(c)) et  $a = 0.02$  (Fig. 2.4(d)). Outre l'absence de distorsion sphérique aux pôles inhérente à la définition de la SCWT, la Voie Lactée est clairement apparente à haute échelle, tandis que pour  $a$  plus petit les sous-configurations d'étoiles se précisent.

Notons finalement que l'échelle  $a = 0.01$  n'est pas autorisée par la résolution de la grille. En effet, le graphique de la Figure 2.5 montre pour cette échelle une valeur  $\hat{\psi}_a(255, 0)$  non négligeable. La largeur de bande de  $\psi_a$  n'est donc pas moralement incluse à l'intervalle des  $l$  permis  $[0, B[$ .

En réalité, il existe aussi une limite supérieure pour l'échelle  $a$ . Cependant, à l'inverse de la droite ou du plan, il est assez difficile de définir systématiquement un intervalle d'échelles  $[a_m, a_M] \subset \mathbb{R}_+^*$  où l'ondelette  $\psi_a$  est suffisamment échantillonnée sur une grille  $\mathcal{G}_B$  donnée. En effet, il n'existe pas de formule explicite pour déterminer l'action fréquentielle de la dilatation stéréographique d'une fonction, ce qui empêche de déterminer analytiquement la taille du support de  $\hat{\psi}_a(l, 0)$  en fonction de  $a$ .

Il est cependant possible d'estimer grossièrement le comportement de  $\hat{\psi}_a$ . Pour s'en convaincre, prenons deux latitudes  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $[0, \pi]$  et étudions l'évolution de la distance (angulaire) séparant les angles dilatés  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  en fonction de  $a$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(a) &= \tan \frac{1}{2}(\alpha_a - \beta_a) \\ &= \frac{\tan \frac{1}{2}\alpha_a - \tan \frac{1}{2}\beta_a}{1 + \tan \frac{1}{2}\alpha_a \tan \frac{1}{2}\beta_a} \\ &= a \left( \frac{\tan \frac{1}{2}\alpha - \tan \frac{1}{2}\beta}{1 + a^2 \tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta} \right) \\ &= \kappa_{\alpha\beta}(a) \Delta_{\alpha\beta}(1) \end{aligned}$$

puisque  $\Delta_{\alpha\beta}(1) = \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ , et avec

$$\kappa_{\alpha\beta}(a) = a \left( \frac{1 + \tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta}{1 + a^2 \tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta} \right). \quad (2.85)$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nuls, cette fonction  $\kappa_{\alpha\beta}$  prend une unique valeur maximale en

$$\tilde{a}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta}}, \quad (2.86)$$

avec  $\kappa_{\alpha\beta}(0) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \kappa_{\alpha\beta}(a) = 0$ . Autrement dit, la distance  $\Delta_{\alpha\beta}(a)$  croît sur  $[0, \tilde{a}]$  et décroît sur  $[\tilde{a}, +\infty[$ .

Soit une ondelette axisymétrique  $\psi$ . Les fréquences des harmoniques sphériques  $\{Y_l^0 : l \in \mathbb{N}\}$  qui composent cette fonction vont être grossièrement inversement proportionnelles à la distance séparant deux de leurs noeuds successifs en latitude.

Par conséquent, si  $l_0$  est la fréquence maximale de l'ondelette  $\psi$  non dilatée, la distance minimale entre deux noeuds successifs de  $Y_{l_0}^0$  est de l'ordre de  $\frac{\pi}{l_0}$ . Supposons que ces deux noeuds soient  $\alpha \in [0, \pi]$  et  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{l_0} \in [0, \pi]$ .

Reprenant la relation  $\Delta_{\alpha\beta}(a) = \kappa_{\alpha\beta}(a)\Delta_{\alpha\beta}(1)$ , la fréquence maximale  $l_M(a)$  de l'ondelette dilatée  $\psi_a$  est associée à la distance minimale  $\frac{\pi}{l_M(a)}$  entre deux noeuds de  $D_a Y_{l_0}^0$ , puisque  $\psi_a = \sum_{l=0}^{l_0} \hat{\psi}(l, 0) D_a Y_l^0$ . Autrement dit,

$$\tan \frac{\pi}{2l_M(a)} \simeq \kappa_{\alpha\beta}(a) \tan \frac{\pi}{2l_0},$$

ou encore,

$$l_M(a) \simeq \frac{\pi}{2 \operatorname{atan}\left(\kappa_{\alpha\beta}(a) \tan\left(\frac{\pi}{2l_0}\right)\right)}. \quad (2.87)$$

Le comportement de  $\kappa_{\alpha\beta}(a)$  étant connu, nous pouvons grossièrement établir que  $l_M(a)$  décroît sur un certain intervalle  $[0, \tilde{a}]$  pour ensuite croître sur  $[\tilde{a}, +\infty[$ .

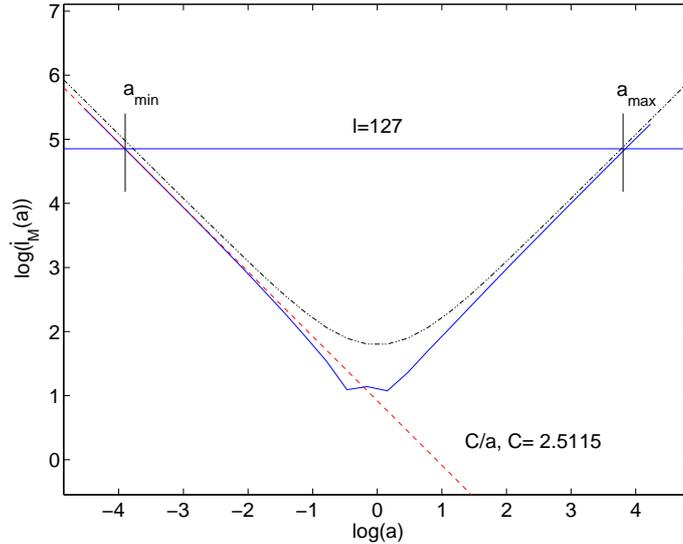


FIG. 2.6 –  $l_M(a)$  en fonction de l'échelle  $a$  (en représentation logarithmique).

Ce phénomène est affiché à la Figure 2.6. Nous avons calculé une estimation de  $l_M(a)$  qui tient compte de la non-compacité du support de  $\hat{\psi}_a(l, 0)$ , à savoir

$$l_M(a) = \min \left\{ L \in \mathbb{N} : 0.99 \|\psi\|^2 \leq \sum_{l=0}^L |\hat{\psi}_a(l, 0)|^2 \leq \|\psi\|^2 \right\}, \quad (2.88)$$

pour différentes valeurs de  $a$  prises dans l'intervalle  $[0.025, 40]$

Sur ce graphique en représentation log-log, un minimum  $l_M(a) = 3$  apparaît clairement au voisinage de  $a = 0.8$ . Ceci signifie que l'ondelette DOG peut au mieux être discrétisée sur une grille sphérique équi-angulaire  $8 \times 8$  et pour  $a$  proche de 0.8 uniquement. En outre, si nous prenons par exemple une grille  $256 \times 256$  ( $B = 128$ ), l'ondelette  $\psi_a$  n'est pas correctement définie pour les valeurs de  $a$  hors de l'intervalle  $[a_m = 0.0204, a_M = 45.83]$  puisque  $l_M(a)$  y est strictement plus grand que  $l = 127$ .

Étudions maintenant l'évolution du support de  $\hat{\psi}_a$  dans l'approximation Euclidienne de la dilatation stéréographique [AV99], c.-à-d. lorsque

$$\psi_a(\theta) = D_a \psi(\theta) \simeq a^{-1} \psi(a^{-1}\theta), \quad (2.89)$$

pour  $a \ll 1$ . Dans ce cas, en supposant  $\text{ess supp}(\psi_a) = [0, u(a)]$ , avec  $u(a) \ll \pi$ ,

$$\hat{\psi}_a(l, 0) = 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \psi_a(\theta) Y_l^0(\theta, 0) \quad (2.90)$$

$$\simeq 2\pi \int_0^{u(a)} \sin(\theta) d\theta a^{-1} \psi(a^{-1}\theta) Y_l^0(\theta, 0) \quad (2.91)$$

$$\simeq 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} r dr a^{-1} \psi'(a^{-1}r) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} J_0(lr) \quad (2.92)$$

$$\simeq a \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{\mathbb{R}_+} r dr \psi'(r) J_0(alr) \quad (2.93)$$

où nous avons employé l'approximation  $Y_l^0(\theta, 0) \simeq \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} J_0(l\theta)$  valable pour  $l \gg 1$  et  $\theta \ll \pi$ ,  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, et  $\psi'$  est un prolongement de  $\psi$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Cette dernière intégrale devient

$$\hat{\psi}_a(l, 0) \simeq \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a \hat{\psi}'(al) \quad (2.94)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} a^{\frac{1}{2}} [(al)^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}'(al)], \quad (2.95)$$

où  $\hat{\psi}'(u)$  est la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction  $\psi'$  vue comme une fonction isotrope de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . En effet, pour une fonction  $g \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $g(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$ , la transformée de Fourier de  $g$  se réduit à sa transformée de Hankel<sup>15</sup>, c.-à-d.

$$\hat{g}(\vec{k}) = \hat{g}(k) = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} r dr g(r) J_0(kr), \quad (2.96)$$

avec  $\|\vec{k}\| = k$ .

Par conséquent, pour  $l \gg 1$  et  $a \ll 1$ ,

$$\hat{\psi}_a(l, 0) \simeq a^{\frac{1}{2}} \hat{\rho}(al), \quad (2.97)$$

<sup>15</sup>Nommée également transformée de Fourier-Bessel.

où  $\hat{\rho}(v) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}(v)^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}'(v)$ .

Ce comportement se vérifie sur la Figure 2.5 où les sommets des courbes  $\hat{\psi}_a(l, 0)$  s'affaissent globalement comme  $\sqrt{a}$  lorsque  $a$  décroît. Comme pour le cas des ondelettes planes, l'estimation (2.97) montre également que la borne supérieure  $l_M(a)$  du support de  $\hat{\psi}(l, 0)$  varie comme  $Ca^{-1}$ , pour une certaine constante  $C \in \mathbb{R}$ . Nous avons tracé cette évolution en trait discontinu sur la Figure 2.6. Il s'agit d'une droite de pente -1 pour une représentation logarithmique de l'échelle. Pour donner une idée, la constante  $C$  a été évaluée à 2.51 par régression linéaire sur les  $a < 0.04$ . Pour les échelles  $a$  faibles, l'écart entre  $l_M(a)$  et cette droite est d'autant plus faible que l'*approximation Euclidienne* de la dilatation stéréographique est bonne.

Finalement, nous avons testé la forme de l'approximation (2.87) en traçant celle-ci en pointillés sur la Figure 2.6 pour  $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$  et  $l_0 = 6$ . Pour cette valeur de  $l_0$ , la forme de  $l_M(a)$  pour  $a \ll 1$  et  $a \gg 1$  est bien prévue par cette approximation. Cependant, elle ne modélise pas correctement le comportement particulier de  $\hat{\psi}_a$  au voisinage de  $a = 1$ .



# Chapitre 3

## Ondelettes, régularité et rayon de courbure

Grâce à sa localité et à sa paramétrisation, la transformée continue en ondelettes explore des applications de traitement de signaux et d'images inaccessibles par une lecture fréquentielle pure.

Nous présentons dans ce chapitre deux de ces applications. La première exploite la localité de la CWT pour sonder la régularité (Hölderienne) locale de signaux et d'images.

La seconde utilise la directionnalité et la "réponse angulaire" de la transformée pour étudier la courbure de contours d'objets sur le plan.

### 3.1 Analyse de régularité Hölderienne

Dans cette section, nous présentons comment la transformée continue en ondelettes à une et deux dimensions établit un lien entre l'évolution de ses coefficients à petite échelle et la régularité Hölderienne de la fonction analysée.

#### 3.1.1 Régularité sur la droite

La régularité Hölderienne d'une fonction est une généralisation continue de la régularité discrète usuelle, c.-à-d. l'appartenance à l'ensemble  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) des fonctions  $k$ -fois dérivables.

**Définition 3.1.** Une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  est dite (localement) Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  en un point  $u \in \mathbb{R}$ , s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor \alpha \rfloor$ , une constante  $K \in \mathbb{R}_+^*$  et une largeur  $\delta > 0$ , tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - u| \leq \delta, \quad |f(x) - P(x - u)| \leq K |x - u|^\alpha. \quad (3.1)$$

L'exposant de Hölder  $h_f(u)$  de  $f$  en  $u$  est défini par

$$h_f(u) = \sup \{ \alpha : f \in \mathfrak{C}^\alpha(u) \}, \quad (3.2)$$

où  $\mathfrak{C}^\alpha(u)$  est l'ensemble des fonctions de régularité  $\alpha$  en  $u$ .

En ce sens, le polynôme  $P$  représente le développement de Taylor d'ordre le plus élevé de  $f$  en  $u$ , et l'exposant de Hölder  $h_f(u)$  équivaut dans ce contexte à la vitesse de décroissance de l'erreur réalisée lors de ce développement.

En utilisant ce fait, la proposition suivante est démontrable (Sec. A.3, p. 162).

**Proposition 3.1.** *Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , une fonction  $f \in \mathfrak{C}^{\alpha+1}(u)$  si  $f' \in \mathfrak{C}^\alpha(u)$ .*

La réciproque n'est cependant pas vérifiée en toute généralité. Il existe en effet des contre-exemples présentant des singularités dites *oscillantes*. Ce phénomène se produit lorsqu'une fonction  $f$  oscille très rapidement au voisinage d'une singularité isolée<sup>1</sup>. Citons par exemple la classe de fonctions  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$  avec  $\alpha \geq 0$  et  $\beta > 0$ , analysée dans [Jaf98] ainsi que dans [MH92] pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ .

Il est clair que chaque fonction  $f$  de cette classe possède une singularité d'exposant  $\alpha$  en l'origine puisque  $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ . Cependant, après chaque dérivation de  $f$ , l'exposant de Hölder en 0 se voit retrancher la quantité  $1 + \beta > 1$ , ce qui contredit la réciproque de la proposition 3.1.

**Définition 3.2.** *Une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  est uniformément Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  sur l'ouvert  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , c.-à-d.  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(]a, b[)$ , s'il existe une constante  $K \in \mathbb{R}_+$  telle que l'équation (3.1) soit vérifiée pour tout  $x$  et tout  $u$  dans  $]a, b[$ . L'exposant de Hölder uniforme sera défini par  $h_f(]a, b[) = \sup\{\alpha : f \in \mathfrak{C}^\alpha(]a, b[)\}$*

Si la fonction  $f$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ , la régularité Hölderienne se traduit dans le comportement de la transformée de Fourier de  $f$ .

**Proposition 3.2.**  *$f \in L^1(\mathbb{R})$  appartient à  $\mathfrak{C}^\alpha(\mathbb{R})$  si*

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)|(1 + |\xi|^\alpha) < \infty. \quad (3.3)$$

La preuve de cette proposition est présentée à l'annexe A (Sec. A.3, p. 162).

Cette proposition ne peut être qu'une condition suffisante pour la notion de régularité locale. L'intégrale (3.3) étant invariante sous translation de  $f$ , elle ne fournit qu'une information sur la régularité uniforme de  $f$ . Ceci est à imputer, d'une part, à l'intégration sur l'espace  $\mathbb{R}$  tout entier réalisée dans le calcul de  $\hat{f}$ , et d'autre part, à la considération du seul module de  $\hat{f}$ . L'accès à une analyse de régularité locale par le critère (3.3) est par conséquent impossible.

Pour s'en convaincre, nous vérifions aisément que si une fonction est localement régulière de classe  $h'$  en tout point  $u \in \mathbb{R}^*$  et cependant régulière de classe  $h''$  avec  $0 < h'' < h'$  en l'origine, l'intégrale (3.3) convergera uniquement pour les valeurs  $\alpha \leq h''$ .

La définition d'exposant de Hölder peut être étendue à des valeurs négatives en définissant la régularité de *distributions tempérées* [MH92].

<sup>1</sup>Définie plus loin.

**Définition 3.3.** Une distribution tempérée  $d \in \mathcal{S}'$  est uniformément Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur un intervalle  $]a, b[$ , c.-à-d.  $d \in \mathfrak{C}^\alpha(]a, b[)$ , si sa primitive est uniformément Höldérienne  $\alpha + 1$  sur ce même intervalle.

Par conséquent, il est possible de déterminer la régularité Hölderienne d'une distribution de Dirac  $\delta(x)$ . En effet,

$$\delta(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} l(x), \quad (3.4)$$

avec  $l(x) = x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ . Cette fonction est uniformément Hölderienne de classe  $\alpha \leq 1$  sur tout voisinage  $U$  de 0. Suivant la définition 3.3, la distribution  $\delta$  est donc de classe  $\alpha < -1$  sur ce même voisinage. Son exposant de Hölder est donc égal à -1 par passage au suprémum.

Par la suite, nous dirons qu'une fonction  $f$  présente une *singularité* (isolée) en un point  $u$  d'un intervalle  $]a, b[$ , si  $h_f(V) > h_f(U)$  pour tout voisinage  $U \subset ]a, b[$  de  $u$  et tout intervalle  $V \subset ]a, b[$  ne contenant pas  $u$ .

A l'inverse de la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes donne accès à l'analyse de la régularité locale d'une fonction [MH92, HT90, AAB95]. Notons que pour des raisons de commodité, nous choisirons toujours des ondelettes  $L^1$ -normalisées.

**Théorème 3.1.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est Hölderienne de classe  $\alpha > 0$  en  $u \in \mathbb{R}$ , et si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est une ondelette à décroissance rapide, c.-à-d.  $\psi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ , avec au moins  $n = \lceil \alpha \rceil$  moments nuls, alors il existe une constante  $A \in \mathbb{R}_+$ , une largeur  $\eta > 0$ , et une échelle  $a_0$  telles que

$$\forall b \in [u - \eta, u + \eta], \quad \forall a < a_0, \quad |W_f(b, a)| \leq A a^\alpha \left(1 + \frac{|b - u|^\alpha}{a^\alpha}\right). \quad (3.5)$$

Ce théorème est dû à S. Jaffard [Jaf91]. La preuve, inspirée de [Mal98] et de [HT90], peut être trouvée à l'annexe A (Sec. A.3, p. 163).

**Corollaire 3.1.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  est Hölderienne de classe  $\alpha > 0$  en  $u$ , et si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est une ondelette à décroissance rapide avec au moins  $n = \lceil \alpha \rceil$  moments nuls, alors il existe une constante  $A \in \mathbb{R}_+$  et une échelle  $a_0 > 0$  telles que,

$$\forall a < a_0, \quad |W_f(u, a)| \leq A a^\alpha. \quad (3.6)$$

*Exemple 3.1.* Prenons la fonction test suivante :

$$f(t) = t^\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = t_+^\alpha, \quad (3.7)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Un calcul rapide montre aisément que l'exposant de Hölder de  $f$  en l'origine est  $\alpha$ . Si nous analysons cette fonction avec une ondelette dérivée de gaussienne

$$\psi(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} g(t), \quad (3.8)$$

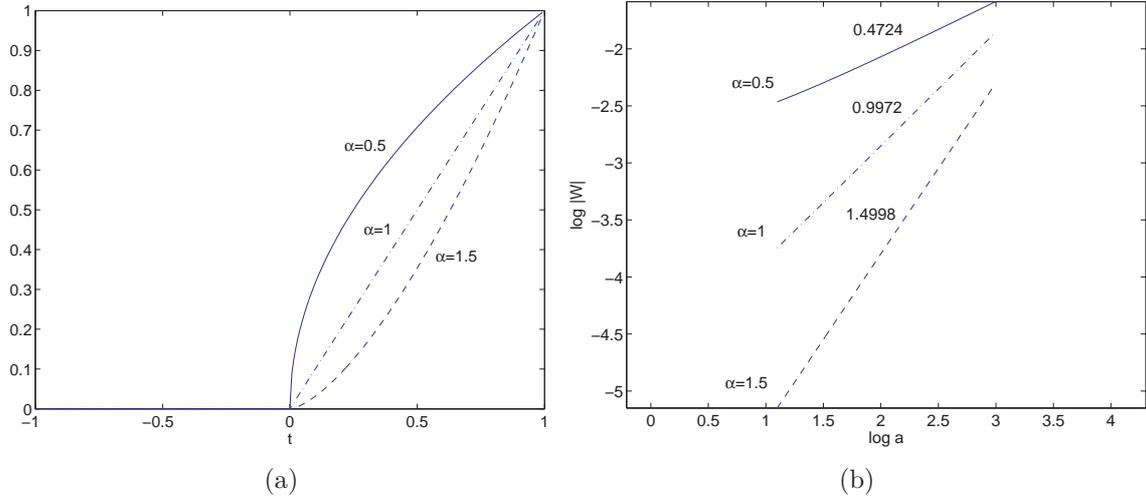


FIG. 3.1 – Analyse d’une singularité d’ordre  $\alpha$ . (a) La fonction modélisant une singularité d’ordre  $\alpha = 0.5, 1$  et  $1.5$  en l’origine. (b) Le comportement en échelles des coefficients en ondelettes  $W_f(0, a)$  en représentation log-log. Les valeurs estimées de l’exposant de Hölder figurent au milieu des courbes.

avec  $g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$  et  $n = \lceil \alpha \rceil$ , la décroissance des coefficients  $W_f(0, a)$  associés doit être en correspondance avec cet exposant. Pratiquement, en prenant la représentation logarithmique de la transformée, nous aurons

$$\log |W_f(0, a)| \leq \alpha \log a + K, \quad (3.9)$$

pour une certaine constante  $K \in \mathbb{R}$ .

Nous présentons sur la Figure 3.1(a) la fonction  $f$  pour trois valeurs de  $\alpha$  :  $0.5, 1$  et  $1.5$ . Le comportement des coefficients en ondelettes  $W_f(0, a)$  en fonction de l’échelle est donné sur la Figure 3.1(b) dans une représentation log-log.

Techniquement, l’ondelette choisie est le chapeau mexicain, c.-à-d. la dérivée seconde d’une gaussienne

$$\psi(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp -\frac{t^2}{2} = (1 - t^2) \exp -\frac{t^2}{2}. \quad (3.10)$$

Celle-ci possède les deux moments nuls nécessaires à l’analyse de la singularité la plus régulière ( $\alpha = 1.5$ ). La fonction test  $f$  est définie sur l’intervalle  $[-1, 1]$  et est discrétisée sur 256 valeurs. L’échelle  $a$  est échantillonnée logarithmiquement sur 128 valeurs entre  $a_m = 3$  et  $a_M = 20$ . La valeur minimale  $a_m$  est compatible avec l’échantillonnage de  $\psi_{a_m}$ , autrement dit,  $\text{supp}(\hat{\psi}_{a_m}) \subset [-128\pi, 128\pi]$  étant donné la période d’échantillonnage  $T = \frac{1}{128}$ .

En se basant sur la moyenne des pentes des courbes calculées, l’exposant de Hölder a été estimé à  $0.4724, 0.9972$  et  $1.4998$  ce qui est assez proche des valeurs réelles respectivement égales à  $0.5, 1$  et  $1.5$ .

### 3.1.2 Régularité isotrope sur le plan

La notion de régularité Hölderienne s'étend au cas bidimensionnel<sup>2</sup> par l'emploi de la distance Euclidienne entre deux points.

**Définition 3.4.** Une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  est dite (localement) Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  en un point  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ , s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor \alpha \rfloor$ , une constante  $K \in \mathbb{R}_+^*$  et une largeur  $\delta > 0$ , tels que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{u}\| < \delta, \quad |f(\vec{x}) - P(\vec{x} - \vec{u})| \leq K \|\vec{x} - \vec{u}\|^\alpha. \quad (3.11)$$

L'exposant de Hölder  $h_f(\vec{u})$  de  $f$  en  $\vec{u}$  est donné par

$$h_f(\vec{u}) = \sup \{ \alpha : f \in \mathfrak{C}^\alpha(\vec{u}) \}, \quad (3.12)$$

où  $\mathfrak{C}^\alpha(\vec{u})$  est l'ensemble des fonctions de régularité  $\alpha$  au point  $\vec{u}$ .

Le polynôme  $P$  correspond au développement de Taylor bidimensionnel de la fonction  $f$  au voisinage du point  $\vec{u}$  à l'ordre le plus élevé compte tenu de la différentiabilité de  $f$  en ce point.

**Proposition 3.3.** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathfrak{C}^{\alpha+1}(\vec{u})$  si  $\frac{\partial}{\partial x} f$  et  $\frac{\partial}{\partial y} f$  appartiennent à  $\mathfrak{C}^\alpha(\vec{u})$ .

La réciproque n'est cependant vérifiée que dans le cas de régularité uniforme définie juste après.

**Définition 3.5.** Une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  est uniformément régulière de classe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ , c.-à-d.  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(U)$ , s'il existe une constante  $K \in \mathbb{R}_+^*$  telle que l'équation (3.11) soit vérifiée pour tout  $\vec{x}, \vec{u} \in U$ .

Comme dans le cas unidimensionnel, la proposition suivante peut être démontrée.

**Proposition 3.4.**  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  appartient à  $\mathfrak{C}^\alpha(\mathbb{R}^2)$  si

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| (1 + \|\vec{k}\|^\alpha) < \infty. \quad (3.13)$$

Pour pallier l'absence de localité dans une analyse fréquentielle utilisant (3.13), un lien entre la décroissance des coefficients en ondelettes et la régularité Hölderienne locale d'une fonction peut être établi de la même manière qu'à une dimension.

**Proposition 3.5.** Si  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(\vec{u})$  et si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  est une ondelette à décroissance rapide avec  $n = \lceil \alpha \rceil$  moments nuls, alors il existe une constante  $K \in \mathbb{R}$ , une largeur  $\delta > 0$  et une échelle maximale  $a_0 > 0$  telle que

$$\forall \vec{b} \in B(\vec{u}, \delta), \quad \forall a \in ]0, a_0], \quad |W_f(\vec{b}, a)| \leq K a^\alpha \left(1 + \frac{\|\vec{b} - \vec{u}\|^\alpha}{a^\alpha}\right). \quad (3.14)$$

En particulier, pour ces mêmes échelles,

$$\forall a \in ]0, a_0], \quad |W_f(\vec{u}, a)| \leq K a^\alpha. \quad (3.15)$$

---

<sup>2</sup>Et même à toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  avec  $n, p \in \mathbb{N}^0$ .

La démonstration de cette proposition est une généralisation bidimensionnelle de la preuve du théorème 3.1.

Finalement, l'extension à des exposants de Hölder négatifs se fait au travers de la définition de régularité uniforme de distributions tempérées.

**Définition 3.6.** Une distribution tempérée  $d \in \mathcal{S}'$  est uniformément Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur un domaine connexe  $D \subset \mathbb{R}^2$ , c.-à-d.  $d \in \mathcal{C}^\alpha(D)$ , si sa primitive en  $x$  ou celle en  $y$  est uniformément Höldériennes  $\alpha + 1$  sur  $D$ .

Par conséquent, une distribution de Dirac  $\delta(\vec{x})$  centrée sur l'origine possède un exposant de Hölder égal à  $-2$ . En effet,  $\delta(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} h(\vec{x})$  avec  $h(\vec{x}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(\vec{x})$ . Puisque  $h$  est uniformément Hölderienne  $\alpha \leq 0$  sur tous voisinages de l'origine,  $\delta$  est uniformément régulière  $\alpha < -2$  sur ces mêmes voisinages. Son exposant de Hölder s'obtient alors par passage au suprémum.

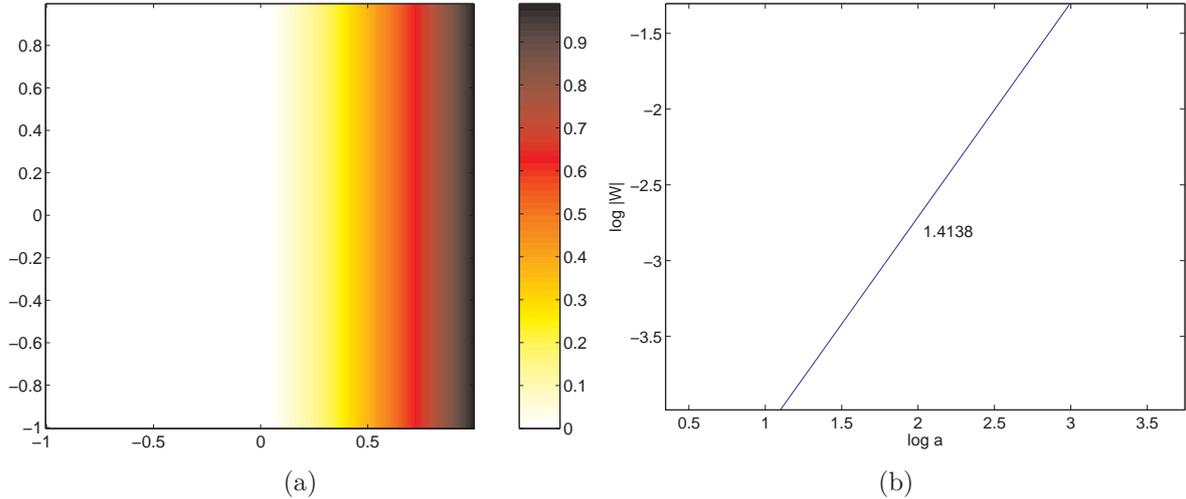


FIG. 3.2 – Analyse d'une singularité d'ordre  $\alpha$ . (a) La fonction modélisant une singularité d'ordre  $\alpha = \sqrt{2}$  sur la droite  $x = 0$ . (b) Le comportement en échelles des coefficients en ondelettes  $W_f(\vec{0}, a)$  en représentation log-log. La valeur estimée de l'exposant de Hölder est indiquée sur la courbe.

*Exemple 3.2.* Considérons la fonction test  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(\vec{x}) = x^\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad (3.16)$$

simulant une singularité d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  sur tous les points de la droite  $x = 0$ . La proposition 3.5 nous indique que

$$\log |W_f(\vec{0}, a)| \leq \alpha \log a + K, \quad (3.17)$$

pour une certaine constante  $K \in \mathbb{R}$ .

La Figure 3.2(a) présente la fonction  $f$  sur une grille  $256 \times 256$  du domaine  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  pour  $\alpha = \sqrt{2}$ . Cette fonction est analysée en l'origine avec l'ondelette chapeau mexicain

$$\psi(\vec{x}) = (2 - \|\vec{x}\|^2) \exp -\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}, \quad (3.18)$$

pour une gamme de 32 échelles réparties logarithmiquement entre  $a_m = 3$  et  $a_M = 20$ . Le comportement des coefficients en ondelettes  $W_f(\vec{0}, 0)$  en fonction de l'échelle est affiché sur la Figure 3.2(b) en représentation log-log. L'exposant de Hölder estimé à partir de la moyenne des pentes de cette courbe est de 1.4138, soit une erreur absolue de 0.03% par rapport à  $\alpha = \sqrt{2}$ .

### 3.1.3 Régularité directionnelle sur le plan $\square$

Une fonction vivant sur  $\mathbb{R}^2$  peut présenter des comportements irréguliers assez pauvrement décrits par le concept de régularité Hölderienne classique. Ce manque peut être comblé par une caractérisation *directionnelle* de cette dernière.

Notons qu'une notion équivalente existe dans le cadre de la modélisation stochastique d'images homogènes et anisotropes [BE03], comme celles analysées pour le diagnostic d'ostéoporose à partir de radiographies d'os.

**Définition 3.7.** Une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  est dite (localement) Hölderienne de classe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  en un point  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  et dans la direction  $\varphi \in S_1$ , c.-à-d.  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(\vec{u}, \varphi)$ , s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor \alpha \rfloor$ , une constante  $K \in \mathbb{R}_+^*$  et une largeur  $\delta > 0$ , tels que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| < \delta, \quad |f(\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi) - P(\lambda)| \leq K |\lambda|^\alpha, \quad (3.19)$$

avec  $\vec{e}_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

L'exposant de Hölder directionnel  $h_f(\vec{u}, \varphi)$  de  $f$  en  $\vec{u}$  et dans la direction  $\varphi$  correspond au suprémum

$$h_f(\vec{u}, \varphi) = \sup \{ \alpha : f \in \mathfrak{C}^\alpha(\vec{u}, \varphi) \}. \quad (3.20)$$

Cette définition de régularité directionnelle se lie à la régularité isotrope au travers de la proposition suivante démontrée à l'annexe A (Sec. A.3, p. 165)

**Proposition 3.6.** Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$h_f(\vec{u}) \leq \min_{\varphi \in S_1} h_f(\vec{u}, \varphi). \quad (3.21)$$

En particulier, une fonction  $f$  de régularité (isotrope)  $\alpha$  en un point  $\vec{u}$  est de régularité  $\alpha$  en ce même point et dans n'importe quelle direction  $\varphi \in S_1$ .

La transformée de Fourier offre une condition suffisante de régularité directionnelle.

**Proposition 3.7.**  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est de régularité Hölderienne de classe  $\alpha$  en un point  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  et dans la direction  $\varphi \in S_1$  si

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| (1 + |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^\alpha) < \infty. \quad (3.22)$$

La preuve figure à l'annexe A (Sec. A.3, p. 165). Encore une fois, il ne s'agit que d'une condition suffisante de régularité car (3.22) ne dépend pas du point  $\vec{u}$ .

La transformée en ondelettes isotrope n'étant clairement pas adaptée à l'analyse de la régularité directionnelle d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , la transformée directionnelle présentée dans le chapitre précédent pourrait donc être employée pour résoudre ce problème.

Cependant, nous préférons adopter un formalisme un peu plus général par l'emploi d'une dilatation anisotrope des ondelettes [VF01]. Autrement dit, nous commençons par choisir une ondelette  $\psi$  *séparable*, c.-à-d. de la forme

$$\psi(\vec{x}) = \eta(x) \phi(y), \quad (3.23)$$

avec  $\eta \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une ondelette unidimensionnelle, et  $\phi$  une fonction d'échelle "bien localisée" telle que  $\langle \phi \rangle = 1$  et  $\phi(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Ensuite, pour  $(\vec{b}, a, \epsilon, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times S_1$ , nous formons

$$\psi_{\vec{b}, a, \epsilon, \theta}(\vec{x}) = \frac{1}{a\epsilon} \psi(r_\theta^{-1} d_{a, \epsilon}^{-1}(\vec{x} - \vec{b})), \quad (3.24)$$

où  $r_\theta$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ , et où  $d_{a, \epsilon}$  est la matrice de dilatation anisotrope définie en (2.40).

La transformée en ondelettes à *dilatation anisotrope* est alors définie par les coefficients

$$W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta) = \langle f | \psi_{\vec{b}, a, \epsilon, \theta} \rangle. \quad (3.25)$$

Si la transformée usuelle, c.-à-d. à dilatation isotrope, s'avère finalement être un bon outil pour l'analyse de la régularité directionnelle, nous devrions par la suite trouver de bons résultats pour le cas où  $a = \epsilon$ . Nous observerons ultérieurement si cette éventualité est respectée.

Un lien peut être établi entre la décroissance des coefficients  $W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta)$  et la régularité directionnelle de  $f$ .

**Proposition 3.8.** *Soit une fonction  $f$  telle que :*

$$(i) \quad f \in \mathfrak{C}^{\alpha(\theta)}(\vec{u}, \theta) \text{ pour tout } \theta \in S_1 \text{ et } \alpha : S_1 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$(ii) \quad f \in \mathfrak{C}^{\alpha_i}(U) \text{ avec } U = B(\vec{u}, \kappa), \text{ pour une certaine largeur } \kappa > 0, \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}_+.$$

Si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  est une ondelette à décroissance rapide de la forme (3.23), et si  $\eta$  possède  $n = \lceil \max_{\theta \in S_1} \alpha(\theta) \rceil$  moments nuls, alors il existe une largeur  $0 < \delta < \kappa$  et deux échelles minimales  $a_0$  et  $\epsilon_0$ , telles que,  $\forall (\vec{b}, a, \epsilon) \in B(\vec{u}, \delta) \times ]0, a_0[ \times ]0, \epsilon_0[$ ,

$$|W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta)| \leq A a^{\alpha(\theta)} (1 + |a^{-1}(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_\theta|^{\alpha(\theta)}) + B \epsilon^{\alpha'_i} (1 + |\epsilon^{-1}(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_\theta|^{\alpha'_i}), \quad (3.26)$$

avec  $\alpha'_i = \min(1, \alpha_i)$ ,  $\vec{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\tilde{\theta} = \theta + \frac{\pi}{2}$ .

La démonstration figure à l'annexe A (Sec. A.3, p. 166).

Sur la singularité  $\vec{u}$ , cette proposition montre en particulier que

$$|W_f(\vec{u}, a, \epsilon, \theta)| \leq A a^{\alpha(\theta)} + B \epsilon^{\alpha'_i}, \quad (3.27)$$

avec  $a < a_0$  et  $\epsilon < \epsilon_0$ .

Si  $\alpha_i = h_f(\vec{u})$  et si  $\alpha(\theta) = h_f(\vec{u}, \theta)$ , en prenant

$$\epsilon \leq a^{\frac{\alpha(\theta)}{\alpha'_i}}, \quad (3.28)$$

les coefficients en ondelettes décroissent comme

$$|W_f(\vec{u}, a, \epsilon, \theta)| \leq C a^{\alpha(\theta)}, \quad (3.29)$$

pour une certaine constante  $C \in \mathbb{R}_+$ .

Ce cas, idéal pour la mesure de  $\alpha(\theta)$  (comme le montre l'exemple qui suit), nous éloigne généralement d'une dilatation isotrope puisque  $\alpha_i \leq \min_{S_1} \alpha(\theta)$ .

*Exemple 3.3.* Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  présentée à la Figure 3.3(a) et telle que

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{\alpha(\chi)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad (3.30)$$

avec  $\chi = \arg \vec{x}$  et  $\alpha(\chi) = 1 + \sin(2\chi)^2$ . La particularité de cette fonction est d'avoir une régularité directionnelle d'ordre  $\alpha(\chi)$  dans chaque direction  $\chi \in [-\pi, \pi]$ . En outre, un calcul rapide montre que  $h_f(\vec{0}) = 1$ .

Si nous analysons cette fonction avec l'ondelette chapeau mexicain, pour la même gamme d'échelles que celle de l'exemple 3.2, en se basant sur la moyenne et sur la déviation standard des pentes de  $\log |W_f(\vec{0}, a)|$  en fonction de  $\log a$ , l'exposant de Hölder isotrope de  $f$  en l'origine est estimé à  $1.3529 \pm 0.0325$ . Cette valeur apparaît comme incohérente avec la valeur  $h_f(\vec{0}) = 1$ . Elle est en outre incompatible avec la proposition 3.6, affirmant que  $h_f(\vec{0}) \leq \min \alpha = 1$ .

Cependant, la proposition 3.5 n'est pas une condition suffisante de régularité. En outre, la fonction analysée est particulièrement riche géométriquement. Elle oscille angulairement avec une fréquence d'oscillation spatiale (par exemple, le long des droites  $x = c$ , avec  $c \in \mathbb{R}_+$ , au voisinage de  $y = 0$ ) tendant vers l'infini lorsqu'on se rapproche de l'origine. Il n'est donc pas exclu que  $f$  présente une sorte de singularité oscillante "angulaire" perturbant l'estimation de  $h_f(\vec{0})$ .

Utilisant la transformée continue en ondelettes à dilatation non isotrope décrite précédemment, la régularité directionnelle de  $f$  en l'origine peut cependant être révélée.

En effet, si  $\epsilon$  est suffisamment petit, c.-à-d. s'il vérifie (3.28), la relation (3.29) nous apprend que

$$\log |W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta)| \leq \alpha(\theta) \log a + C', \quad (3.31)$$

pour une certaine constante  $C' \in \mathbb{R}$ . Cette inégalité est semblable aux précédentes relations (3.9) et (3.17) obtenues respectivement dans le cas de unidimensionnel et isotrope.

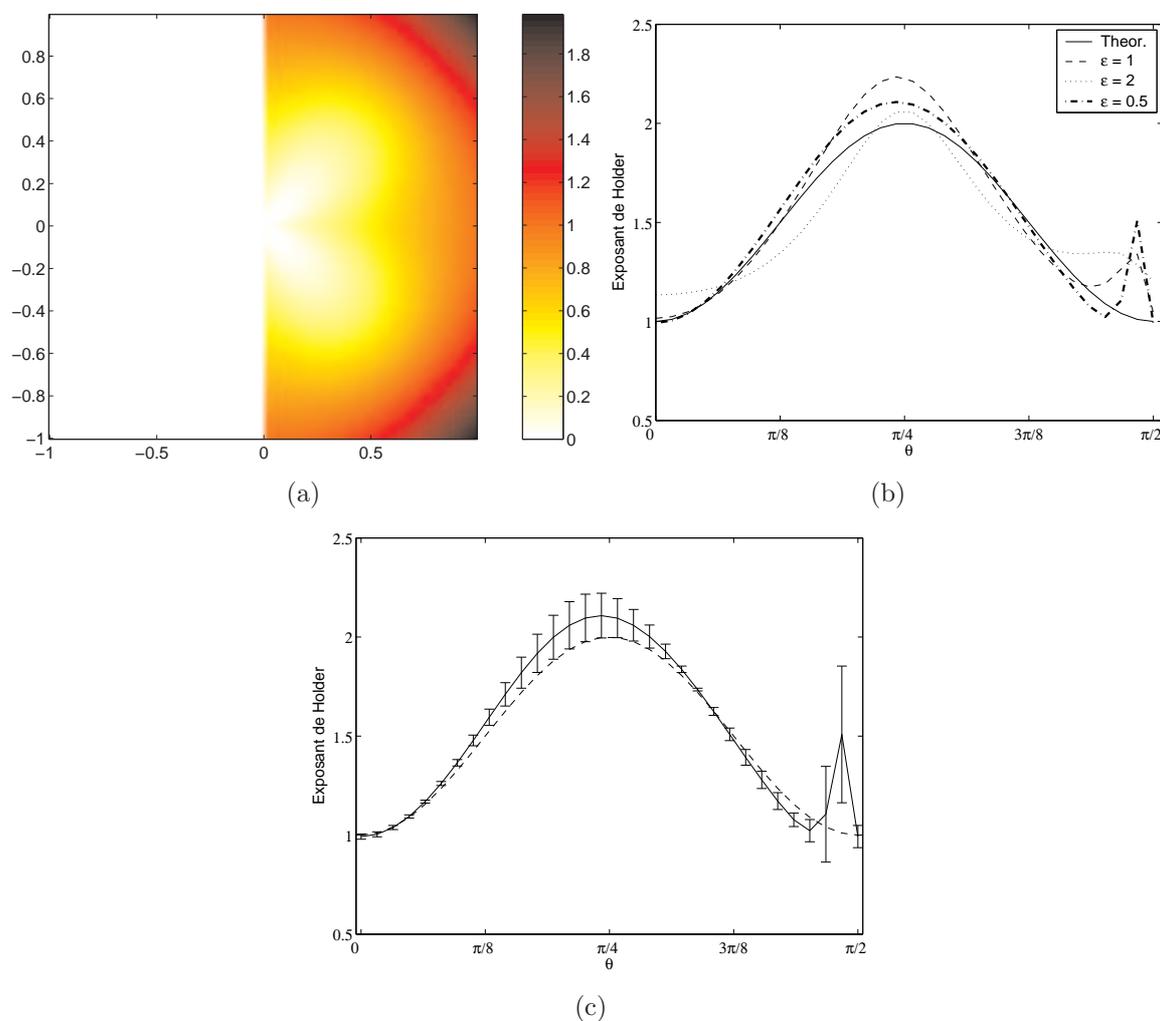


FIG. 3.3 – Singularité directionnelle en l'origine d'ordre  $\alpha(\chi) = 1 + \sin(2\chi)^2$  où  $\chi = \arg \vec{x}$ . (a) La fonction test. (b) Estimation de l'exposant de Hölder directionnel pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . La courbe continue représente la valeur théorique  $\alpha(\theta)$ . (c) Estimation de l'exposant de Hölder pour  $\epsilon = 0.5$ . Les barres d'erreur correspondent à la déviation standard des pentes de  $\log |W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta)|$  entre  $a_m$  et  $a_M$ . La courbe discontinue représente la valeur théorique  $\alpha(\theta)$ .

Pratiquement, notre échelle  $a$  appartenant à un certain intervalle  $[a_m, a_M]$ , nous nous contenterons de prendre  $\epsilon < a_m$ .

En conformité avec la formulation (3.23), l'ondelette choisie est la fonction

$$\psi(\vec{x}) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad (3.32)$$

laquelle affiche un comportement gaussien en  $y$  et une ondelette chapeau mexicain en  $x$ . Cette dernière assure les deux moments nuls indispensables à l'analyse de  $\alpha(\theta) \leq 2$ .

La Figure 3.3(b) présente l'estimation de cette régularité pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$  :  $\epsilon = 2, 1$  et  $0.5$ . Pour chaque direction, l'estimation de  $\alpha(\theta)$  a été réalisée en prenant la valeur moyenne des pentes de  $\log |W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta)|$  vis à vis de  $\log a$  sur l'intervalle  $[a_m = 5, a_M = 20]$ . La courbe théorique  $\alpha(\theta)$  est affichée en trait continu.

La distance fonctionnelle (au sens de  $L^2$ ) entre  $\alpha$  et les trois courbes estimées décroît avec  $\epsilon$ . Pour  $\epsilon = 2, 1$  et  $0.5$  elle est ainsi égale respectivement à  $0.0297, 0.0239$  et  $0.0192$ . L'estimation s'améliore donc bien à mesure que  $\epsilon$  diminue.

La Figure 3.3(c) présente la courbe obtenue pour  $\epsilon = 0.5$ . Une indication de l'erreur commise sur l'estimation de  $\alpha$  a été réalisée en prenant la déviation standard de la distribution des pentes de  $\log |W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta)|$  sur la gamme d'échelles utilisée.

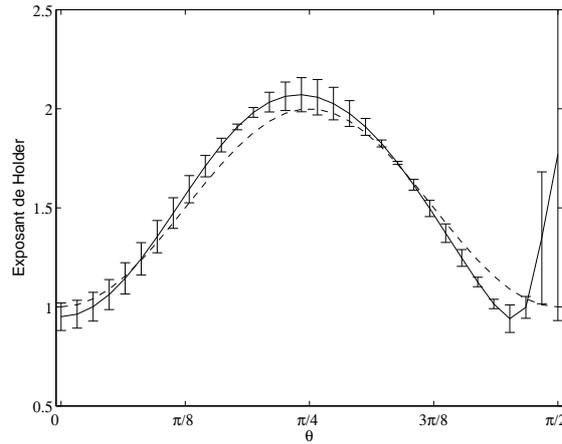


FIG. 3.4 – Estimation de l'exposant  $h_f(\vec{0}, \theta)$  sur base de la décroissance de  $\log |W_f(\vec{0}, a, \epsilon, \theta)|$  avec  $\epsilon(a) = \lambda a^2$ . Les échelles sont prises dans l'intervalle  $[5, 20]$  et  $\lambda = \frac{1}{50}$ . La courbe théorique  $\alpha(\theta)$  est affichée en trait discontinu.

Afin de relacher la condition  $\epsilon < a_m$ , nous pouvons effectuer la même estimation de  $h_f(\vec{0}, \theta)$  avec un  $\epsilon$  fonction de l'échelle  $a$ .

En effet, puisque le nombre de moments de  $\eta$  est  $n = \lceil \max_{S_1} \alpha(\theta) \rceil = 2$  et étant donné que  $\alpha'_i = 1$ , il existe un  $\lambda > 0$  tel que

$$\forall a < a_M, \quad \epsilon = \lambda a^2 \leq a^{\alpha(\theta)}, \quad (3.33)$$

Auquel cas, l'inégalité (3.29) reste valide.

Nous présentons sur la Figure 3.4 le résultat de l'estimation. La gamme d'échelles est la même que précédemment avec  $\lambda = \frac{1}{50}$  de sorte que  $\epsilon(a_m) = 0.5$ . Excepté au voisinage de  $\theta = \pi/2$ , c.-à-d. proche du bord du demi-plan  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$  définissant  $f$ , l'approximation reste bonne et ce, malgré une valeur  $\epsilon(a_M) = 8$  importante. Les barres d'erreurs sont aussi légèrement inférieures pour les valeurs maximales de  $h_f(\vec{0}, \theta)$ .

Pour terminer cette section, mentionnons qu'il existe une approche semblable à la nôtre pour l'estimation d'une régularité directionnelle ponctuelle. Celle-ci peut être trouvée en [EBB95]. Elle consiste à effectuer la transformée en ondelettes de la droite sur les quatre orientations principales d'une image respectant sa discrétisation, à savoir l'horizontale, la verticale et les deux diagonales. Ce cas correspond dans notre méthode à prendre  $\epsilon = 0$  et  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ . Ce schéma est par la suite employé pour détecter les contours d'objets en fonction, entre autre, de l'exposant de Hölder obtenu selon ces quatre directions. Le formalisme adopté n'est cependant pas aussi général que celui développé plus haut. En outre, il paraît difficile à généraliser aux orientations  $\theta$  quelconques sans introduire une certaine étendue à l'ondelette dans la direction transverse à celle de l'analyse. Autrement dit, il est important de prendre  $\epsilon \neq 0$  pour échantillonner correctement l'ondelette  $\psi$  sur la grille de l'image quel que soit l'angle  $\theta$ .

## 3.2 Estimation de rayon de courbure $\square$

Une image est généralement constituée d'objets aux formes diverses et délimités par des contours plus ou moins nets. La transformée continue en ondelettes directionnelles présentée au chapitre précédent permet dans des cas simples de caractériser ces derniers en estimant leur rayons de courbure.

Pour ce faire, le comportement de la transformée lors de l'étude d'un disque de rayon connu est tout d'abord modélisé sur base de la connaissance de la sélectivité angulaire des ondelettes.

Observons premièrement le comportement de la transformée continue en ondelettes lors de l'analyse d'une droite

$$d(\vec{x}) = \delta(x), \quad (3.34)$$

où  $\delta$  est une distribution de Dirac. En Fourier, cette fonction devient

$$\hat{d}(\vec{k}) = 2\pi \delta(k_y). \quad (3.35)$$

Analysons  $d$  avec une ondelette  $\psi$  directionnelle telle que le support de  $\hat{\psi}$  est principalement inclus dans un cône  $C(\varphi) = \{\vec{k} \in \mathbb{R}^2 : |\arg \vec{k}| \leq \varphi\}$ . Puisque

$$W_d(\vec{b}, a, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{d}(\vec{k}) \hat{\psi}^*(a\vec{\theta}^{-1}\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dk_x \hat{\psi}^*(ak_x\vec{e}_\theta) e^{ik_x b_x}, \quad (3.37)$$

avec  $\vec{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ , nous aurons  $W_d(\vec{b}, a, \theta) \simeq 0$  pour  $|\theta| \geq \varphi$ .

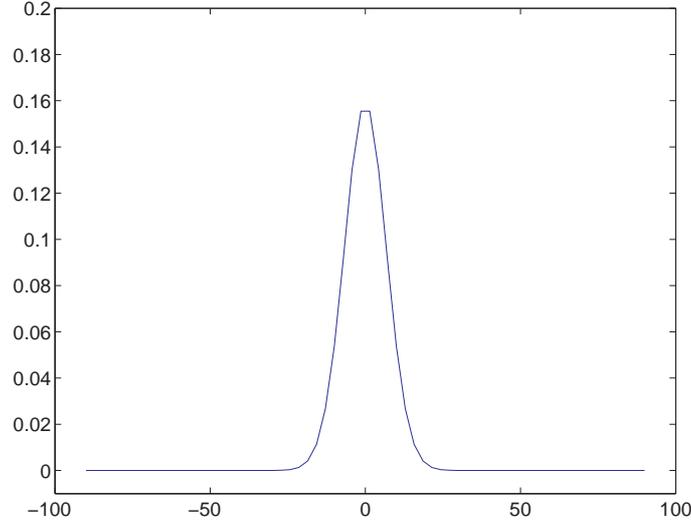


FIG. 3.5 – Analyse d’une droite avec l’ondelette de Morlet. ( $k_0 = 6, \sigma = 1$ ). Réponse angulaire des  $|W_d|^2$  en l’origine et pour  $a = 3$ .

Autrement dit, la droite  $d$  sera perçue par les coefficients en ondelettes sur un intervalle angulaire de largeur  $\Delta_d = 2\varphi$ . Cette réponse angulaire est en outre indépendante de l’échelle  $a$ .

Nous présentons à la Figure 3.5 la réponse angulaire de  $|W_d|^2$  à l’origine pour l’ondelette de Morlet ( $k_0 = 6, \sigma = 1$ ) et  $a = 3$ .

Analysons maintenant un cercle de rayon  $R$  passant par l’origine et défini par

$$c(\vec{x}) = \delta(|\vec{x} + \vec{R}| - R), \quad (3.38)$$

avec  $\vec{R} = (R, 0)$ .

Une telle fonction ne permet malheureusement pas le calcul analytique de sa transformée en ondelettes. Il est cependant possible de modéliser graphiquement le problème. Commençons par définir

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} \text{ess sup} (\psi_{\vec{0}, a, \theta}), \quad (3.39)$$

l’union à l’échelle  $a$  de tous les supports (numériques) des  $\psi_{\vec{0}, a, \theta}$ .  $\mathcal{S}$  est clairement un disque centré sur l’origine, et dont la taille est proportionnelle à  $a$ . Autrement dit,

$$\mathcal{S} = B(\vec{0}, a\rho) \quad (3.40)$$

avec  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  fonction de l’ondelette  $\psi$ .

Si l’échelle  $a$  est fixée, les coefficients  $W_c(\vec{0}, a, \theta)$  ne seront affectés que par les points du cercle appartenant à  $\mathcal{S}$ . Sur cette zone, et si  $a$  est suffisamment petit, le cercle peut être approximé par deux segments de droite  $D_1$  et  $D_2$  (Fig. 3.5), respectivement orientés dans les directions  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  and  $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ , avec  $\alpha = \arcsin \frac{a\rho}{2R}$ . Par conséquent, et en se référant

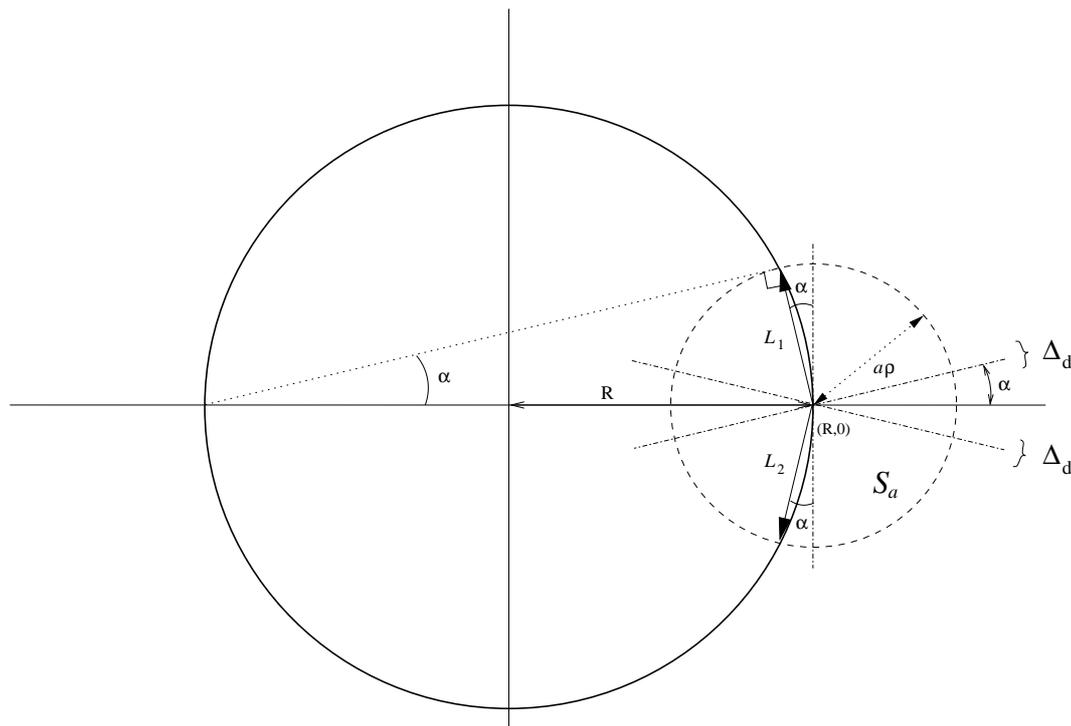


FIG. 3.6 – Explication graphique du comportement angulaire des coefficients en ondelettes en un point d'un cercle de rayon  $R$ .

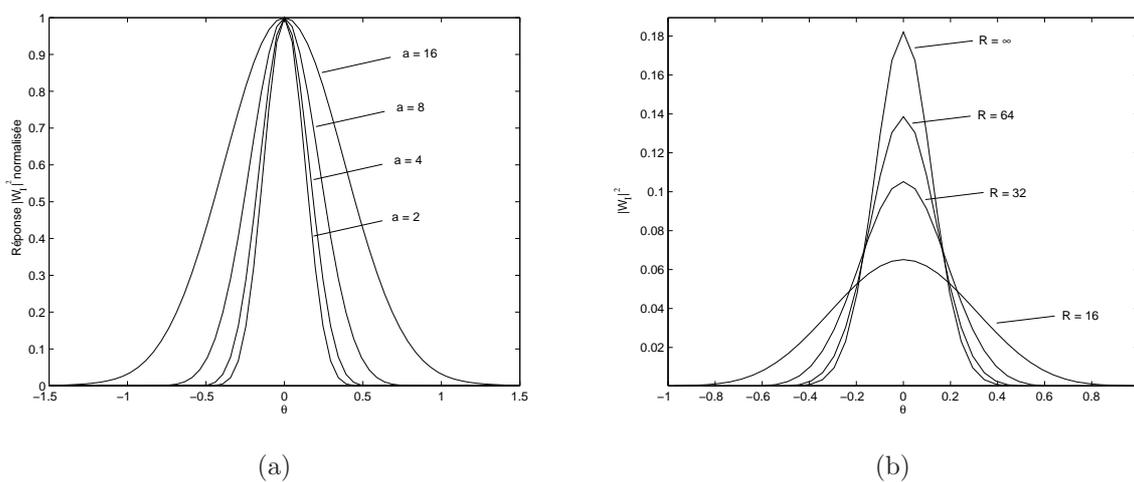


FIG. 3.7 – Réponse angulaire des  $|W_c|^2$  sur le bord d'un cercle pour différentes échelles et différents rayons. (a) Variation de la réponse en fonction de l'échelle. (b) Réponse en fonction du rayon (en pixels).

aux conclusions de l'analyse précédente, la largeur de la réponse angulaire des coefficients  $|W_c(\vec{0}, a, \theta)|^2$  sera grossièrement proportionnelle à

$$\Delta_c = 2\alpha + \Delta_d = \Delta_d + 2 \arcsin \frac{a\rho}{2R}. \quad (3.41)$$

Pour un facteur  $\frac{a\rho}{2R}$  faible, c.-à-d. pour un grand rayon ou pour une faible échelle, nous aurons

$$\Delta_c \simeq \Delta_d + \frac{a\rho}{R}. \quad (3.42)$$

Cette dernière expression est cohérente avec le fait que pour  $R$  tendant vers l'infini ou pour  $a$  tendant vers 0, la largeur de la réponse tend vers celle de l'analyse d'une droite.

La Figure 3.7 illustre ce phénomène. Sur la Figure 3.7(a), la réponse angulaire des  $|W_c|^2$  est affichée pour différentes échelles. La largeur de cette réponse augmente bien avec l'échelle. Le lien entre largeur de réponse et valeur du rayon est également apparent sur la Figure 3.7(b).

Il est donc possible de relier la largeur  $\Delta_c$  de la réponse angulaire des coefficients en ondelettes au rayon de courbure du contour d'un objet. Le lien exact qui lie ces deux quantités étant analytiquement inaccessible, il est nécessaire de calibrer la méthode par l'analyse systématique d'une série de cercles de rayons différents, et ce, pour plusieurs échelles. Des résultats préliminaires en ce sens lors de l'étude d'une spirale d'Archimède peuvent être trouvés en [AJ03b].



# Chapitre 4

## Repères d'ondelettes

Ce chapitre aborde la théorie des repères d'ondelettes. Celle-ci établit sous quelles conditions les paramètres de la transformée continue en ondelettes d'un espace de Hilbert donné se discrétisent tout en assurant la reconstruction de la fonction analysée.

Nous présentons tout d'abord la méthode générale pour ensuite étudier les repères du plan  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Nous examinons en particulier en quoi la *directionnalité* et la sélectivité angulaire des ondelettes s'avèrent être des principes importants dans la recherche de représentations d'images adaptées. Les repères d'ondelettes sur la droite  $L^2(\mathbb{R})$  ne sont cependant pas traités. Nous conseillons aux lecteurs intéressés les livres [Dau92, Mal98, Tor95] pour des vues détaillées de ce sujet. La fin de ce chapitre est dédiée à la formation de repères d'ondelettes sur la sphère à partir de la théorie continue développée à la section 2.4.

### 4.1 Généralités

#### 4.1.1 Repères et opérateurs

La théorie des repères fut originellement développée par Duffin et Schaeffer [DS52] dans un contexte de représentation de fonctions à bande limitée sur une distribution de points irrégulière. Elle fut par la suite généralisée au traitement de signaux par Daubechies, Grossmann et Meyer dans un papier de 1986 [DGM86]. Nous adoptons dans cette section les points de vues détaillés dans [Tor95] et [Mal98].

Considérons un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$  muni de son produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définissant la norme  $\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle}$  pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ . Prenons également un ensemble dénombrable  $\Gamma$ .

**Définition 4.1.** *Un repère discret dans  $\mathfrak{H}$  est une famille de vecteurs  $\Psi = \{\psi_n \in \mathfrak{H} : n \in \Gamma\}$  telle qu'il est possible de trouver deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$  réalisant l'encadrement*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle \psi_n | f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (4.1)$$

pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ . Les valeurs  $A$  et  $B$  sont nommées bornes du repère  $\Psi$ .

Dans le cas où  $A = B$ , le repère est dit *strict*. En outre, s'il n'existe aucun sous-ensemble  $\Theta \subset \Gamma$  tel que  $\{\psi_n \in \mathfrak{H} : n \in \Theta\}$  forme un repère, la première famille est dite *exacte*. Si  $A = B = 1$  et si  $\|\psi_n\| = 1$  pour tout  $n \in \Gamma$ , alors, par l'insertion de  $f = \psi_n$  dans (4.1),  $\Psi$  constitue une base orthonormée.

Etant donné un repère  $\Psi = \{\psi_n \in \mathfrak{H} : n \in \Gamma\}$  de  $\mathfrak{H}$ , l'opérateur de repère  $L$  est également défini par

$$Lf = \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \psi_n. \quad (4.2)$$

Cet opérateur est un opérateur borné comme le montre la proposition suivante

**Proposition 4.1.** *L'opérateur de repère  $L$  associé à  $\Psi$  est borné et partage les bornes du repère, c.-à-d.*

$$A\mathcal{I} \leq L \leq B\mathcal{I}, \quad (4.3)$$

où, pour deux opérateurs  $P$  et  $Q$ ,  $P \leq Q$  signifie  $\langle Pg | g \rangle \leq \langle Qg | g \rangle$  pour tout  $g \in \mathfrak{H}$ .

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [Tor95].

$L$  peut être obtenu d'une autre manière. Pour ce faire, nous devons introduire l'opérateur d'analyse  $U : \mathfrak{H} \rightarrow \text{Im } U$  défini par

$$U : f \mapsto \{\langle \psi_n | f \rangle : n \in \Gamma\} \quad (4.4)$$

Il est clair que son image  $\text{Im } U$  est incluse à  $l^2(\Gamma) = \{x : \sum_{n \in \Gamma} |x[n]|^2 < \infty\}$ . En effet, selon (4.1),  $\|Uf\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |\langle \psi_n | f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$ .

A l'aide du produit scalaire sur  $l^2(\Gamma)$ , l'adjoint  $U^*$  de  $U$  est défini par la relation

$$\langle x | Uf \rangle = \langle U^*x | f \rangle,$$

pour tout  $f \in \mathfrak{H}$  et tout  $x \in l^2(\Gamma)$ , est donné par

$$U^*x = \sum_{n \in \Gamma} x[n] \psi_n. \quad (4.5)$$

En effet, pour tout  $x \in l^2(\Gamma)$  et tout  $f \in \mathfrak{H}$ ,

$$\begin{aligned} \langle U^*x | f \rangle &= \langle x | Uf \rangle \\ &= \sum_{n \in \Gamma} x[n]^* \langle \psi_n | f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \Gamma} x[n] \psi_n \middle| f \right\rangle. \end{aligned}$$

En comparaison avec  $U$ ,  $U^*$  est donc un opérateur de synthèse et  $L = U^*U$ .

### 4.1.2 Inversion

Il est temps maintenant de s'interroger sur la reconstruction de  $f$  à partir de ses coefficients  $Uf$ . En d'autres termes, comment trouver un inverse de  $U$ ? La proposition suivante apporte une réponse à ce problème.

**Proposition 4.2.** *Si  $\{\psi_n\}$  est un repère où les  $\psi_n$  sont linéairement dépendants (non libres), alors  $\text{Im } U$  est strictement inclus à  $l^2(\Gamma)$  et admet un infinité d'inverses à gauche  $\tilde{U}^{-1}$ .*

Cette proposition est démontrée en [Mal98] et à l'annexe A (Sec. A.4, p. 168).

Parmi tous les inverses à gauche de  $U$  existe le *pseudo-inverse*  $\tilde{U}^{-1}$ . Ce dernier s'annule sur l'espace  $\text{Im } U^\perp$  orthogonal à  $\text{Im } U$ , c.-à-d.

$$\tilde{U}^{-1}x = 0, \quad \forall x \in \text{Im } U^\perp. \quad (4.6)$$

**Proposition 4.3.** *Le pseudo inverse de l'opérateur  $U$  défini en (4.4) est également donné par*

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*. \quad (4.7)$$

La démonstration figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 169).

Munis de toutes ces définitions, nous introduisons maintenant la famille de fonctions duales  $\{\tilde{\psi}_n : n \in \Gamma\}$  telles que

$$\tilde{\psi}_n = L^{-1}\psi_n = (U^*U)^{-1}\psi_n. \quad (4.8)$$

**Proposition 4.4.**  *$\{\tilde{\psi}_n : n \in \Gamma\}$  est un repère de bornes  $0 < B^{-1} \leq A^{-1} < \infty$ , appelé le repère dual de  $\{\psi_n : n \in \Gamma\}$ , et*

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \tilde{\psi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle \tilde{\psi}_n | f \rangle \psi_n. \quad (4.9)$$

La preuve est donnée à l'annexe A (Sec. A.4, p. 169). Cette proposition démontre que l'opérateur linéaire  $L$  défini en (4.2) est borné à inverse borné puisqu'il vérifie (4.3) et que  $B^{-1} \leq L^{-1} \leq A^{-1}$ .

*Remarque 4.1.* Les opérateurs linéaires bornés à inverse borné sur  $\mathfrak{H}$  forment en réalité un groupe noté  $GL(\mathfrak{H})$  [AAG93].

*Remarque 4.2.* Dans le cas d'un repère strict,  $A = B$  et  $\tilde{\psi}_n = \frac{1}{A}\psi_n$ . En effet, puisque  $\langle U^*Uf | f \rangle = A\|f\|^2$  pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ , l'opérateur autoadjoint est un multiple de l'identité, c.-à-d.  $U^*U = A\mathcal{I}$ . En conséquence,  $(U^*U)^{-1} = \frac{1}{A}\mathcal{I}$ , d'où le résultat.

Pour terminer cette section, notons que dans le cas où  $A \simeq B$ , une bonne approximation de  $f$  est obtenue par

$$f \simeq \frac{2}{A+B}Lf = \frac{2}{A+B} \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \psi_n, \quad (4.10)$$

puisque  $\frac{2}{A+B}L \simeq \mathcal{I}$ . En réalité, un développement en série entière de  $L^{-1}$  au voisinage de l'identité peut être réalisé et conduire à une meilleure approximation de  $f$  [Tor95].

### 4.1.3 Algorithmes

Lorsque le repère dual  $\{\tilde{\psi}_n\}$  est trop complexe à calculer (voire inaccessible), par exemple lorsque le repère dépend du signal ou s'il possède un caractère irrégulier<sup>1</sup>, des algorithmes itératifs doivent être employés pour la reconstruction de  $f \in \mathfrak{H}$  à partir de ses coefficients  $Uf$ . Ces procédures sont l'algorithme de Richardson extrapolé et la méthode du *gradient conjugué* [Mal98]. Nous ne détaillons ici que la seconde méthode.

Celle-ci se base sur l'égalité

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = (U^*U)^{-1}(U^*U)f = L^{-1}Lf,$$

et sur le fait que  $Lf = \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \psi_n$  se calcule aisément. A l'inverse de l'algorithme extrapolé de Richardson, la méthode ne nécessite pas la connaissance des bornes du repère. Elle converge aussi plus rapidement.

**Théorème 4.1.** *Soit  $g \in \mathfrak{H}$ . Afin de calculer  $f = L^{-1}g$ , nous commençons par initialiser les quantités*

$$f_0 = 0, \quad r_0 = p_0 = g, \quad p_{-1} = 0. \quad (4.11)$$

*L'algorithme est alors défini par l'induction suivante*

$$\lambda_n = \frac{\langle r_n | p_n \rangle}{\langle p_n | Lp_n \rangle} \quad (4.12a)$$

$$f_{n+1} = f_n + \lambda_n p_n \quad (4.12b)$$

$$r_{n+1} = r_n - \lambda_n Lp_n \quad (4.12c)$$

$$p_{n+1} = Lp_n - \frac{\langle Lp_n | Lp_n \rangle}{\langle p_n | Lp_n \rangle} p_n - \frac{\langle Lp_n | Lp_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1} | Lp_{n-1} \rangle} p_{n-1}. \quad (4.12d)$$

Si  $\sigma = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}$  alors la convergence est telle que

$$\|f - f_n\|_L \leq \frac{2\sigma^n}{1 + \sigma^{2n}} \|f\|_L, \quad (4.13)$$

avec  $\|\cdot\|_L = \|L \cdot\|$  la norme induite par  $L$ . Cette règle assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ .

Une preuve de ce théorème peut être obtenue en [Mal98].

Dans le cas où le repère est presque strict,  $A \simeq B$ ,  $\sigma \ll 1$  et la convergence est rapide. Si le repère est très redondant, c.-à-d. si  $B^{-1}A \ll 1$ , alors

$$\sigma = \frac{1 - \sqrt{B^{-1}A}}{1 + \sqrt{A^{-1}B}} \simeq 1 - 2\sqrt{A^{-1}B},$$

et  $\sigma$  est proche de l'unité. Dans ce cas, pour obtenir une erreur relative  $\frac{\|f - f_n\|_L}{\|f\|_L}$  inférieure à  $\epsilon < 1$ , il faudra réaliser  $n \approx -\sqrt{A^{-1}B} \log \frac{\epsilon}{2}$  itérations. Pour donner une idée, si  $A^{-1}B = 10$ , 15 itérations sont nécessaires pour obtenir une erreur relative inférieure à 1%.

<sup>1</sup>Sur la droite, si les positions des éléments d'un repère son irrégulièrement réparties.

#### 4.1.4 Repères continus et semi-continus

Jusqu'à présent, nous avons parlé uniquement de repère d'un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$  dont les éléments sont au plus dénombrables. Il est cependant possible d'étendre cette définition dans le cas où cette dénombrabilité est perdue, et où un ou plusieurs indices prennent des valeurs continues [AAG93, Tor95].

Lorsque tous les indices sont continus, ceux-ci peuvent être rassemblés au sein d'un même symbole  $\nu$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{C}$  de mesure  $d\mu(\nu)$ . La famille de fonctions  $\{\psi_\nu \in \mathfrak{H}\}$  est alors un *repère continu* de  $\mathfrak{H}$  si l'*opérateur de repère continu*  $L : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  telle que

$$Lf = \int_{\nu} d\mu(\nu) \langle \psi_\nu | f \rangle \psi_\nu \quad (4.14)$$

est encadré par deux bornes, c.-à-d.  $A\mathcal{I} \leq L \leq B\mathcal{I}$  pour  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  [AAG93]. Ceci garantit l'inversion de  $L$ , autrement dit  $L \in GL(\mathfrak{H})$ , et la reconstruction de  $f$ .

Dans le cas où une partie seulement des indices sont continus, le regroupement de tous les indices à valeurs continues est noté par  $\nu \in \mathcal{C}$ , et par  $n \in \mathcal{D}$ , l'ensemble des indices à valeurs discrètes. La famille  $\{\psi_{\nu,n} \in \mathfrak{H} : \nu \in \mathcal{C}, n \in \mathcal{D}\}$  forme un repère s'il existe deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles que,  $\forall f \in \mathfrak{H}$ ,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{D}} \int_{\nu \in \mathcal{C}} d\mu(\nu) |\langle \psi_{\nu,n} | f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (4.15)$$

Nous voyons dans les sections suivantes les conditions à remplir pour répondre à cette inégalité, et ce, aux travers de certains espaces de Hilbert particuliers ( $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $L^2(S^2)$ ), et lorsque seule la position des ondelettes est continue.

#### 4.1.5 Repères contrôlés $\square$

Dans cette section, nous définissons une légère variante à la notion de repère, à savoir les repères *contrôlés* par un opérateur  $O$  borné à inverse borné sur  $\mathfrak{H}$ .

**Définition 4.2.** *Un repère contrôlé par un opérateur  $O \in GL(\mathfrak{H})$  est une famille de vecteurs  $\{\psi_n \in \mathfrak{H} : n \in \Gamma\}$  telle qu'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  réalisant l'encadrement*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \langle f | O \psi_n \rangle \leq B \|f\|^2, \quad (4.16)$$

pour toute fonction  $f \in \mathfrak{H}$ .

Dans ce cas, l'opérateur de repère devient

$$L_o f = \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle O \psi_n. \quad (4.17)$$

La proposition suivante montre que les repères contrôlés sont équivalents aux repères classiques.

**Proposition 4.5.** *La famille  $\Psi = \{\psi_n \in \mathfrak{H} : n \in \Gamma\}$  est un repère de  $\mathfrak{H}$  contrôlé par un opérateur  $O \in GL(\mathfrak{H})$  ssi  $\Psi$  est un repère (classique) de  $\mathfrak{H}$ .*

Ce résultat s'obtient simplement en projetant  $L_o f$  sur  $f$  et en constatant que  $L_o = OL$ . Dès lors, si  $\Psi$  est un repère contrôlé par  $O$ , il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$A\mathcal{I} \leq L_o \leq B\mathcal{I} \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$AO^{-1} \leq L \leq BO^{-1}, \quad (4.19)$$

avec  $L$  l'opérateur de repère classique défini en (4.2). En outre, puisqu'il existe deux constantes  $A_o, B_o \in \mathbb{R}_+^*$  telles que  $A_o \leq O \leq B_o$  et  $B_o^{-1} \leq O^{-1} \leq A_o^{-1}$ , un repère contrôlé par  $O$  avec des bornes d'encadrement  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  est un repère classique de bornes  $AB_o^{-1}$  et  $BA_o^{-1}$ . Inversement, si  $A' \leq L \leq B'$  pour deux constantes  $A', B' \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $A'O \leq L_o \leq B'O$  et  $A'A_o \leq L_o \leq B'B_o$ , ce qui démontre (4.16).

Par conséquent, toute fonction  $f \in \mathfrak{H}$  peut être reconstruite à l'aide de (4.9) sans tenir compte de l'opérateur  $O$ .

Cependant, dans le cas où  $A \simeq B$ ,  $\frac{2}{A+B}L_o$  est proche de l'identité et nous obtenons une nouvelle approximation de  $f$

$$f \simeq \frac{2}{A+B}L_o f = \frac{2}{A+B} \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle O \psi_n. \quad (4.20)$$

Autrement dit, dans le cas où les bornes du repère contrôlé sont plus proches l'une de l'autre que ne le sont les bornes du repère classique associé, (4.20) permet d'obtenir une meilleure approximation de  $f$  que celle issue de l'opérateur de repère  $L$  en (4.10).

*Remarque 4.3.* La notion de repère contrôlé par un opérateur  $O \in GL(\mathfrak{H})$  s'intègre en réalité dans une structure beaucoup plus générale développée en [AAG93]. Un repère de  $\mathfrak{H}$  y est caractérisé par l'ensemble des fonctions  $\psi_x \in \mathfrak{H}$ , où l'indice  $x$  appartient à un espace localement compact<sup>2</sup>  $X$  possédant une mesure de Borel  $\nu$ , et par l'opérateur  $L \in GL(\mathfrak{H})$  donné par

$$Lf = \int_X d\nu(x) \langle \psi_x | f \rangle \psi_x, \quad \forall f \in \mathfrak{H}. \quad (4.21)$$

Autrement dit,  $\Psi \equiv \Psi(\psi_x, L)$ . Dès lors, pour un opérateur  $T \in GL(\mathfrak{H})$ , la famille  $\tilde{\psi}_x = T\psi_x$  définit également un repère  $\tilde{\Psi}(\tilde{\psi}_x, \tilde{L})$  telle que  $\tilde{L} = TLT^*$ , et les deux repères  $\Psi$  et  $\tilde{\Psi}$  sont alors dits *similaires*. Ceci est relié au fait que les opérateurs de  $GL(\mathfrak{H})$  préservent la structure *Hilbertienne*<sup>3</sup> de  $\mathfrak{H}$ . Dans le cas d'un repère contrôlé par  $O \in GL(\mathfrak{H})$ , si  $A\mathcal{I} \leq L_o \leq B\mathcal{I}$ , pour deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $AA_o\mathcal{I} \leq L_o O^* \leq BB_o\mathcal{I}$ , puisque  $O$  est auto-adjoint et que  $A_o \leq O \leq B_o$  pour deux bornes  $A_o, B_o \in \mathbb{R}_+^*$ . Etant donné que  $L_o O^* = O L_o^*$ , un repère contrôlé par  $O \in GL(\mathfrak{H})$  revient à former un repère  $\Psi(O\psi_n, O L_o^*)$ , lequel est similaire à  $\Psi(\psi_n, L)$ .

<sup>2</sup>discret, partiellement discret ou continu.

<sup>3</sup>Où  $\mathfrak{H}$  est vu comme un espace de Hilbert associé à une classe d'équivalence de produits scalaires (ou de normes) plutôt qu'à un seul d'entre eux.

### Repères pondérés

Un cas particulier de repère contrôlé survient lorsque l'opérateur  $O$  est diagonal vis à vis des éléments  $\{\psi_n : n \in \Gamma\}$  du repère, c.-à-d. lorsque  $O\psi_n = w_n\psi_n$  avec  $w_n \in \mathbb{R}$ . Remarquons qu'il faut nécessairement  $w_n > 0$  puisque  $O \in GL(\mathfrak{H})$ . En effet,  $w_n\|\psi_n\|^2 = \langle \psi_n | O\psi_n \rangle \geq A_O\|\psi_n\|^2$ . Ceci nous amène à la notion de *repères pondérés*.

**Définition 4.3.** *Soit une famille au plus dénombrable  $\Psi = \{\psi_n : n \in \Gamma\}$  d'éléments dans  $\mathfrak{H}$ , et une séquence de poids  $w = \{w_n \in \mathbb{R}_+^* : n \in \Gamma\}$  strictement positifs. Nous dirons que cette famille constitue un  $w$ -repère de  $\mathfrak{H}$ , ou un repère pondéré par  $w$ , s'il existe deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles que, pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ ,*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} w_n |\langle \psi_n | f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (4.22)$$

Vu la positivité stricte des  $w_n$ , un  $w$ -repère  $\{\psi_n\}$  correspond en réalité au repère classique  $\{\sqrt{w_n}\psi_n\}$ . Ceci garantit que l'ensemble des résultats présentés dans les sections précédentes s'appliquent au cas des  $w$ -repères.

Un opérateur de  $w$ -repère  $L_w : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  se définit cependant par

$$L_w f = \sum_{n \in \Gamma} w_n \langle \psi_n | f \rangle \psi_n, \quad (4.23)$$

pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ . Il s'agit bien sûr de l'opérateur  $L_O$  précédent lorsque  $O\psi_n = w_n\psi_n$ .

En outre, par la condition (4.22), nous pouvons créer

$$U_w : f \mapsto \{\langle \psi_n | f \rangle\}. \quad (4.24)$$

Cet opérateur voit son image incluse à  $l^2(\Gamma, w_n) = \{x[n] : \sum_{n \in \Gamma} w_n |x[n]|^2 < \infty\}$ . Sur cet espace, le produit scalaire entre deux séquences  $x[n]$  et  $y[n]$  est donné par

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \Gamma} w_n x[n] y^*[n], \quad (4.25)$$

de sorte que l'adjoint  $U_w^* : l^2(\Gamma, w_n) \rightarrow \mathfrak{H}$  tel que  $\langle U_w^* x | f \rangle = \langle x | U_w f \rangle$ , correspond à

$$U_w^* : x \mapsto U_w^* x = \sum_{n \in \Gamma} w_n x[n] \psi_n. \quad (4.26)$$

Comme dans le cas des repères classiques, nous avons ainsi  $L_w = U_w^* U_w$ .

Le formalisme précédent, établi également dans [Mal98], s'applique ensuite de la même manière. En effet,  $L_w$  est injectif. Si  $L_w f = 0$ , alors  $\langle L_w f | f \rangle = \langle U_w f | U_w f \rangle = 0$ , où le dernier produit scalaire est à prendre sur  $l^2(\Gamma, w_n)$ . Par l'inégalité gauche de (4.22),  $\|f\|$  et  $f$  sont donc nulles. En outre,  $L_w$  est surjective sur  $\mathfrak{H}$ . Par l'absurde, si  $g \in \mathfrak{H}$  est orthogonal à  $\text{Im } L_w$ , alors  $\langle g | L_w g \rangle = 0$ . Par conséquent,  $\langle U_w g | U_w g \rangle = 0$  et de nouveau  $g$  est nul.

L'opérateur  $L_w$  est donc inversible et

$$f = L_w^{-1} L_w f = L_w^{-1} \sum_{n \in \Gamma} w_n \langle \psi_n | f \rangle \psi_n = \sum_{n \in \Gamma} w_n \langle \psi_n | f \rangle \tilde{\psi}_n, \quad (4.27)$$

où  $\tilde{\psi}_n = L_w^{-1} \psi_n$ .

Cette notion de repère pondéré rejoint l'origine de la théorie des repères développée par Duffin et Schaeffer [DS52] dans le contexte de la reconstruction de signaux  $f$  à bande limitée. Ceux-ci ont montré que si  $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , alors la fonction continue  $f$  peut être reconstruite à partir d'un échantillonnage irrégulier  $\{f(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Pour ce faire, le repère à employer est la famille

$$\left\{ \sqrt{\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{2}} h_T(t - t_n) : n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (4.28)$$

où  $h_T(t) = \text{sinc}(\frac{\pi t}{T})$ .

Des poids  $w_n = \sqrt{\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{2}}$  strictement positifs apparaissent donc explicitement. Ceux-ci tiennent compte en réalité de la géométrie particulière de l'échantillonnage. Nous voyons dans la section 4.5.3 que le même type de raisonnement doit être appliqué lors d'un échantillonnage sphérique équi-angulaire permettant la réalisation de repères d'ondelettes sphériques.

### Repères semi-continus contrôlés

Remarquons pour terminer cette section que nous pouvons aussi définir des repères semi-continus contrôlés par un opérateur de  $GL(\mathfrak{H})$ . Dans ce cas, en employant les mêmes conventions qu'à la section 4.1.4, la famille  $\Psi = \{\psi_{\nu, n} \in \mathfrak{H} : \nu \in \mathcal{C}, n \in \mathcal{D}\}$  constitue un tel repère s'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{D}} \int_{\nu \in \mathcal{C}} d\mu(\nu) \langle \psi_{\nu, n} | f \rangle \langle f | O \psi_{\nu, n} \rangle \leq B \|f\|^2, \quad (4.29)$$

pour tout  $f \in \mathfrak{H}$  et pour un opérateur  $O \in GL(\mathfrak{H})$ . Encore une fois, il est facile de démontrer que  $\Psi$  est un repère semi-continu contrôlé ssi  $\psi$  est un repère semi-continu.

Un cas particulier survient lorsque  $O$  se factorise en

$$O \psi_{\nu, n} = w_n \tilde{O} \psi_{\nu, n}, \quad (4.30)$$

où  $\tilde{O}$  est un autre opérateur de  $GL(\mathfrak{H})$ , et où les  $w_n$  sont des poids nécessairement positifs. Ces derniers n'agissent que sur la partie dénombrable du repère et la condition (4.29) devient

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{D}} w_n \int_{\nu \in \mathcal{C}} d\mu(\nu) \langle \psi_{\nu, n} | f \rangle \langle f | \tilde{O} \psi_{\nu, n} \rangle \leq B \|f\|^2. \quad (4.31)$$

Ce type de repère sera employé à la section 4.5.2 lors de la création de repère semi-continus d'ondelettes sur la sphère.

## 4.2 Repères d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

Adoptant le point de vue développé en [AMV04] à partir d'une généralisation du cas unidimensionnel, la création d'un repère d'ondelettes sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est réalisable de la manière suivante.

- Une dilatation logarithmique est premièrement définie de sorte que  $a_j = a_0 \lambda^{-j}$  pour  $\lambda > 1$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . Nous prendrons  $a_0 = 1$  dans la suite. Notons que le paramètre  $j$  est lié à la notion de *résolution* de l'ondelette. En effet, d'un  $j$  important découle une ondelette de petite taille et donc de haute résolution.
- Les angles sont discrétisés en découpant l'intervalle  $[0, 2\pi[$  en  $N$  morceaux :  $\theta_n = n\Delta\theta = n\frac{2\pi}{N}$  avec  $N \in \mathbb{N}^0$  et  $n \in \mathbb{Z}[N] = \{0, \dots, N-1\}$  ;
- Les positions doivent être choisies avec un peu plus d'attention pour tenir compte de l'effet des dilatations et des rotations. En clair,

$$\vec{b}_{j,\mathbf{m},n} = \lambda^{-j} r_n \vec{u}_{\mathbf{m}}, \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{m} = (m_0, m_1) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $r_n$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta_n$ , et  $\vec{u}_{\mathbf{m}} = (m_0\beta_0, m_1\beta_1)$ .

Ces choix conduisent à la définition de la grille

$$\Lambda(\lambda, N, \beta_0, \beta_1) = \{(\vec{b}_{j,\mathbf{m},n}, a_j, \theta_n) : (j, \mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[N]\}, \quad (4.33)$$

sur laquelle se placent les ondelettes  $\psi_{j,\mathbf{m},n}(\vec{x}) = a_j^{-1} \psi(a_j^{-1} r_n^{-1} \vec{x} - \vec{u}_{\mathbf{m}})$ .

Les conditions sous lesquelles cette discrétisation conduit à la formation d'un repère de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sont explicitées par le théorème suivant [AMV04].

**Théorème 4.2.** *Etant donné une ondelette  $\psi$  respectant les conditions suivantes :*

$$(i) \quad s(\lambda, N, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\vec{k} \in \mathbb{R}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k})|^2 \quad (4.34)$$

$$= \operatorname{ess\,inf}_{(k, \theta) \in P_\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_p(\lambda^{-j} k, \varphi - \theta_n)|^2 > 0, \quad (4.35)$$

où  $\vec{k} = k(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\hat{\psi}_p$  est la représentation fréquentielle polaire de l'ondelette  $\psi$ , et  $P_\lambda = [0, \lambda[ \times [0, 2\pi[$ ,

$$(ii) \quad S(\lambda, N, \psi) = \sup_{\vec{k} \in \mathbb{R}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k})|^2 \quad (4.36)$$

$$= \sup_{(k, \theta) \in P_\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_p(\lambda^{-j} k, \varphi - \theta_n)|^2 < \infty, \quad (4.37)$$

$$(iii) \quad \sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^2} (1 + \|\vec{u}\|)^{1+\epsilon} \alpha(\vec{u}) < \infty, \quad (4.38)$$

avec  $\epsilon > 0$  et

$$\alpha(\vec{u}) = \sup_{\vec{k} \in \mathbb{R}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k} + \vec{u})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k})|. \quad (4.39)$$

Dans ce cas, il existe deux constantes  $\beta_0^c, \beta_1^c > 0$  telles que :

1.  $\forall \beta_0 \in ]0, \beta_0^c[, \beta_1 \in ]0, \beta_1^c[$ , la famille  $\{\psi_{j, \mathbf{m}, n}\}$  associée aux constantes  $(\lambda, N, \beta_0, \beta_1)$  est un repère de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  ;
2.  $\forall \delta > 0$ , il existe  $\beta_0 \in ]\beta_0^c, \beta_0^c + \delta[, \beta_1 \in ]\beta_1^c, \beta_1^c + \delta[$ , tels que la famille  $\{\psi_{j, \mathbf{m}, n}\}$  associée aux constantes  $(\lambda, N, \beta_0, \beta_1)$  ne forme plus un repère de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

La preuve de ce théorème figure en [AMV04]. Nous la détaillons cependant à l'annexe A (Sec. A.4, p. 170) car un schéma analogue à celle-ci sera adopté lors de la formation d'un repère sphérique (Sec. 4.5).

### 4.3 Repères semi-continus d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

Dans cette section, nous nous intéressons au cas de la discrétisation partielle de la transformée continue en ondelettes du plan. En clair, et comme présenté abstraitement à la section 4.1.4, seules l'échelle et l'orientation des ondelettes sont discrétisées en laissant leur position varier continûment sur  $\mathbb{R}^2$ , d'où le nom de grille *semi-continue*<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Le terme *presque-continu* est aussi employé dans [Tor95].

### 4.3.1 Définitions

Les paramètres de la transformée continue en ondelettes sont restreints à la grille semi-continue

$$\Lambda(a_0, \lambda, \Delta\theta) = \{(\vec{b}, a_j, \theta_n) : \vec{b} \in \mathbb{R}^2, (j, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[N]\}, \quad (4.40)$$

où  $a_j = a_0 \lambda^{-j}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta_n = n\Delta\theta$ , et  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$  pour  $N \in \mathbb{N}^0$  orientations. Nous supposons par la suite que  $a_0 = 1$ .

Les ondelettes associées sont donc définies par

$$\psi_{\vec{b},j,n}(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \psi\left(r_n^{-1} \frac{\vec{x} - \vec{b}}{a_j}\right), \quad (4.41)$$

avec  $\psi$  une ondelette admissible non isotrope vérifiant (2.35). Remarquons que les ondelettes sont ici  $L^1$ -normalisées afin de simplifier par la suite les formules fréquentielles en évitant l'apparition de l'échelle.

Nous employons également la notation

$$\psi_{j,n}(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \psi\left(r_n^{-1} \frac{\vec{x}}{a_j}\right), \quad (4.42)$$

impliquant que  $\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k}) = \hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})$ .

La condition de repère semi-continu pour la famille  $\{\psi_{\vec{b},j,n} : (\vec{b}, j, n) \in \Lambda\}$  est

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} |\langle \psi_{\vec{b},j,n} | f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (4.43)$$

pour  $0 < A \leq B < \infty$  fixés et  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  quelconque.

**Proposition 4.6.** *La famille  $\{\psi_{\vec{b},j,n} : (\vec{b}, j, n) \in \Lambda\}$  est un repère semi-continu de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de bornes  $0 < A \leq B < \infty$  ssi*

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k})|^2 \leq B, \quad (4.44)$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

La preuve de cette proposition figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 173).

En outre, la reconstruction découle de la proposition suivante [Van98] :

**Proposition 4.7.** *Si la famille  $\{\psi_{\vec{b},j,n} : (\vec{b}, j, n) \in \Lambda\}$  est un repère semi-continu de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de bornes  $0 < A \leq B < \infty$ , alors toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  peut être reconstruite à l'aide de ses coefficients  $W_{j,n}(\vec{b}) = \langle \psi_{\vec{b},j,n} | f \rangle$  en utilisant la somme*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [W_{j,n} * \tilde{\psi}_{j,n}](\vec{x}), \quad (4.45)$$

où  $\tilde{\psi}$  est l'ondelette duale telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \hat{\psi}_{j,n}(\vec{k}) \hat{\psi}_{j,n}^*(\vec{k}) = 1, \quad (4.46)$$

avec  $\tilde{\psi}_{j,n}(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \tilde{\psi}(r_n^{-1} \frac{\vec{x}}{a_j})$  et  $\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k}) = \hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})$ .

La preuve de cette proposition s'obtient aisément en considérant la transformée de Fourier de la relation (4.45) et le théorème de convolution.

Un exemple d'ondelette duale  $\tilde{\psi}$  peut être facilement construit en prenant

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \frac{\hat{\psi}(\vec{k})}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k})|^2}. \quad (4.47)$$

**Repère strict :** Un cas particulier survient lorsque  $A = B$ , autrement dit lorsque le repère semi-continu est *strict*. Dans ce cas, en supposant sans perte de généralité que  $A = 1$ ,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k})|^2 = 1, \quad (4.48)$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $\tilde{\psi} = \psi$ . Par conséquent, tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  peut être reconstruit avec la somme

$$f(\vec{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [W_{j,n} * \psi_{j,n}](\vec{x}). \quad (4.49)$$

Pour limiter la gamme des échelles disponibles, il est commode de définir une *fonction d'échelle*  $\zeta_J$  telle que, pour  $J \in \mathbb{Z}$  fixé,

$$|\hat{\zeta}_J(\vec{k})|^2 + \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_{j,n}(\vec{k})|^2 = 1. \quad (4.50)$$

Dans ce cas, en définissant l'approximation à la résolution  $J$  de la fonction  $f$  par

$$S_J(\vec{b}) = \langle \zeta_{\vec{b},J} | f \rangle, \quad (4.51)$$

où  $\zeta_{\vec{b},J}(\vec{x}) = \zeta_J(\vec{x} - \vec{b})$ , la formule de reconstruction devient

$$f(\vec{x}) = [S_J * \zeta_J](\vec{x}) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [W_{j,n} * \psi_{j,n}](\vec{x}), \quad (4.52)$$

Une solution possible pour le choix de  $\zeta_J$  consiste à prendre simplement  $\zeta_J(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \zeta(\frac{\vec{x}}{a_j})$  avec

$$|\hat{\zeta}(\vec{k})|^2 = \sum_{j \in -\mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2. \quad (4.53)$$

$S_J$  capture ainsi les composantes "basses fréquences" de  $f$ .

**Repère linéaire :** Si l'ondelette  $\psi$  répond à la propriété suivante,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k}) = 1, \quad (4.54)$$

il est possible de réobtenir  $f$  à l'aide d'une formule de reconstruction dite de Littlewood-Paley, c.-à-d.

$$f(\vec{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} W_{j,n}(\vec{x}). \quad (4.55)$$

En d'autres termes, l'ondelette duale est ici la distribution  $\delta(\vec{x})$  de Dirac. Nous nommons ce type de repère, repère *linéaire*.

Une fois encore, une fonction d'échelle  $\zeta_J$  peut être introduite de sorte que, pour un  $J \in \mathbb{Z}$  fixé,

$$\hat{\zeta}_J(\vec{k}) + \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k}) = 1. \quad (4.56)$$

Ceci conduit à la reconstruction

$$f(\vec{x}) = S_J(\vec{x}) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} W_{j,n}(\vec{x}). \quad (4.57)$$

La solution particulière du cas précédent devient alors

$$\hat{\zeta}(\vec{k}) = \sum_{j=-\mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k}), \quad (4.58)$$

en prenant  $\zeta_J(\vec{x}) = \frac{1}{a_J^2} \zeta\left(\frac{\vec{x}}{a_J}\right)$ .

### 4.3.2 Implémentation et discrétisation

En pratique, la fonction  $f$  analysée est limitée et discrétisée spatialement. En supposant que celle-ci est à bande limitée, c.-à-d. sans perte de généralité que  $f$  appartient à l'ensemble  $B_\pi$  défini en (1.49), la section 1.2 nous indique que l'exactitude des formules de reconstruction (4.49), (4.52), (4.55) et (4.57), est garantie si les fonctions  $\psi_{\vec{b},j,n}$  et  $\zeta_{\vec{b},J}$  sont également dans  $\mathcal{B}_\pi$ .

Cependant, si le support de  $\hat{\psi}$  est compact, il existe un  $j \in \mathbb{Z}$  minimal tel que le support de  $\hat{\psi}_{\vec{b},j,n}$  n'est pas inclus à  $B_\pi = [-\pi, \pi[ \times [-\pi, \pi[$ . Ceci impose une limite supérieure aux résolutions disponibles.

**Proposition 4.8.** *Supposons que  $\hat{\psi}$  soit à support compact, et soit  $j_\psi$  telle que*

$$j_\psi = \min\{j \in \mathbb{Z} : (\exists n \in \mathbb{Z}[N] : \text{supp}(\hat{\psi}_{j,n}) \not\subseteq B_\pi)\}. \quad (4.59)$$

Alors, si la famille  $\{\psi_{\vec{b},j,n} : (\vec{b}, j, n) \in \Lambda\}$  est un repère strict de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de borne unité, pour toute fonction  $f \in \mathcal{B}_\pi$ ,

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=-\infty}^{j_\psi-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [W_{j,n} * \psi_{j,n}](\vec{x}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [H_n * \eta_n](\vec{x}), \quad (4.60)$$

avec  $H_n(\vec{b}) = \langle \eta_{\vec{b},n} | f \rangle$ ,  $\eta_{\vec{b},n}(\vec{x}) = \eta(r_n^{-1}(\vec{x} - \vec{b}))$ ,  $\eta_n = \eta_{\vec{0},n}$ , et  $\eta$ , la fonction résiduelle définie par

$$|\hat{\eta}(\vec{k})|^2 = \mathbb{1}_{B_\pi}(\vec{k}) \sum_{j=j_\psi}^{\infty} |\hat{\psi}(a_j \vec{k})|^2. \quad (4.61)$$

Notons que, par construction, la fonction  $\eta$  capture les composantes “hautes fréquences” de  $f$  sur le domaine  $B_\pi = [-\pi, \pi[ \times [-\pi, \pi[$ .

Puisque que nous travaillons avec des fonctions de  $\mathcal{B}_\pi$ , les coefficients  $W_{j,n}$  et  $H_n$  sont calculés au moyen de (1.51), tandis que les convolutions apparaissant dans la reconstruction (4.60) sont obtenues à l'aide de (1.52).

A une mise à l'échelle près, nous pouvons toujours supposer  $j_\psi = 1$ . Par conséquent, en introduisant la fonction d'échelle précédente associé à la résolution  $-J$  pour  $J > 0$  fixé, la formule de reconstruction devient,

$$f(\vec{x}) = (S_{-J} * \zeta_{-J})(\vec{x}) + \sum_{j=-J+1}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [W_{j,n} * \psi_{j,n}](\vec{x}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [H_n * \eta_n](\vec{x}). \quad (4.62)$$

Le paramètre  $j$  est ici pris dans l'intervalle  $[-J + 1, 0]$  de sorte que la décomposition s'effectue sur exactement  $J$  résolutions différentes.

Dans le cas linéaire, la proposition 4.8 se transforme sans peine, avec

$$f(\vec{x}) = S_{-J}(\vec{x}) + \sum_{j=-J+1}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} W_{j,n}(\vec{x}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} H_n(\vec{x}), \quad (4.63)$$

pour une fonction résiduelle  $\eta$  définie par

$$\hat{\eta}(\vec{k}) = \mathbb{1}_{B_\pi}(\vec{k}) \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\psi}(a_j \vec{k}). \quad (4.64)$$

### 4.3.3 Exemple de repère conique strict $\square$

Comme mentionné à la section 2.3.4, une ondelette conique  $\psi$  est une ondelette dont le support fréquentiel est contenu dans un cône convexe pointant sur l'origine. Dans cette section, nous construisons un repère semi-continu strict de telles ondelettes. Celui-ci emploie la fonction  $\beta_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  développée initialement par Coifman et Meyer dans les contextes

de bases orthogonales lisses et localisées et de bases de sinus-cosinus locaux, et généralisée ensuite par Wickerhauser [CM91, Wic94, Mal98].

Cette fonction est définie par la règle

$$\beta_{s+1}(t) = \beta_s\left(\sin\frac{\pi t}{2}\right), \quad (4.65)$$

$$\beta_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right), \quad (4.66)$$

où  $s \in \mathbb{N}$  et  $t \in [-1, 1]$ .

La propriété qui nous intéresse ici est que

$$\beta_s^2(t) + \beta_s(-t)^2 = 1, \quad (4.67)$$

pour  $t \in [-1, 1[$  et pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

Si nous définissons la fonction  $\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de la manière suivante

$$\rho_s(t) = \beta_s(2t+1) \mathbb{1}_{[-1, 0[}(t) + \beta_s(1-2t) \mathbb{1}_{[0, 1[}(t), \quad (4.68)$$

nous aurons  $\rho_s^2(t) + \rho_s^2(t-1) = 1$  sur le même intervalle. Le paramètre  $s$  détermine en réalité la régularité de la fonction  $\rho_s$  en  $\pm 1$ .  $\rho_s$  possède en effet  $2^s - 1$  dérivées nulles en ces points.

Nous pouvons donc construire un repère strict d'ondelettes  $\{\psi_{\vec{b}, j, n}\}$  sur base de l'ondelette mère

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \rho_p\left(\log_\lambda \frac{\lambda k}{\pi}\right) \rho_q\left(\frac{N\kappa}{2\pi}\right), \quad (4.69)$$

où  $\vec{k} = (k, \kappa) \in \mathbb{R}_+ \times S_1$  en coordonnées polaires.

Il est en effet facile de voir que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}_{j, n}(\vec{k})|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \rho_p\left(\log_\lambda \frac{\lambda a_j k}{\pi}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \left| \rho_q\left(\frac{N\kappa}{2\pi} - n\right) \right|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \rho_p\left(\log_\lambda \left(\frac{\lambda k}{\pi}\right) - j\right) \right|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

L'ondelette  $\psi$  est une ondelette conique (Sec. 2.3.4) puisque le support de  $\hat{\psi}$  est le secteur

$$\text{Sect}\left(\left[\frac{\pi}{\lambda^2}, \pi\right], \left[-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right]\right) = \{\vec{k} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{k}\| \in \left[\frac{\pi}{\lambda^2}, \pi\right], \arg \vec{k} \in \left[-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right]\} \quad (4.70)$$

contenu dans un cône d'ouverture angulaire  $\frac{4\pi}{N}$ . Les paramètres  $p, q \in \mathbb{N}$  déterminent en outre la régularité de l'ondelette sur les bords du cône. Ce repère est nommé *repère conique CMW* pour rappeler qu'il exploite les propriétés de la fonction  $\beta_s$  développée par Coifman, Meyer et Wickerhauser.

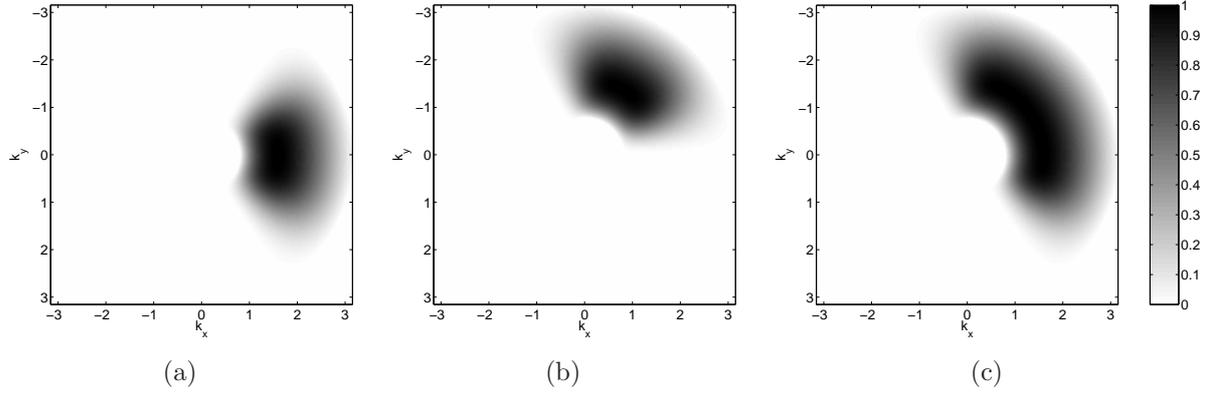


FIG. 4.1 – Repère conique CMW pour  $N = 6$  orientations ( $p = 0, q = 1$ ). (a)  $\hat{\psi}(\vec{k})$ . (b)  $\hat{\psi}(r_1^{-1}\vec{k})$ . (c)  $[\hat{\psi}^2(\vec{k}) + \hat{\psi}^2(r_1^{-1}\vec{k})]^{\frac{1}{2}}$ .

Sur la Figure 4.1, l'ondelette mère du repère conique CMW à 6 orientations (avec  $\lambda = 2$ ,  $p = 0$  et  $q = 1$ ) est présentée en fréquence (Fig. 4.1(a)), avec sa version tournée par  $r_1$  de  $\frac{\pi}{3}$  radians (Fig. 4.1(b)). La Figure 4.1(c) affiche finalement la somme des carrés de ces deux dernières fonctions. Le caractère strict du repère formé par  $\psi$  se manifeste par l'apparition d'un plateau angulaire de hauteur 1 entre 0 et  $\frac{\pi}{3}$  radians pour  $k = \frac{\pi}{2}$ .

Suivant (4.53), la fonction d'échelle est

$$\hat{\zeta}(\vec{k}) = \left[ \sum_{j \in -\mathbb{N}} \rho_p^2 \left( \log_\lambda \left( \frac{\lambda k}{\pi} \right) - j \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.71)$$

Puisque  $\text{supp}(\hat{\psi}) = \text{Sect}([\frac{\pi}{\lambda^2}, \pi], [-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}])$ ,  $\text{supp}(\hat{\psi}_j) \not\subseteq B_\pi$  pour  $j \geq 1$ . La fonction résiduelle  $\eta$  correspond donc à

$$\hat{\eta}(\vec{k}) = \mathbb{1}_{B_\pi}(\vec{k}) \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \rho_p^2 \left( \log_\lambda \left( \frac{\lambda k}{\pi} \right) - j \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.72)$$

#### 4.3.4 Application au débruitage d'images $\square$

Lorsque la qualité d'une image  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est altérée par un bruit<sup>5</sup>, il est possible d'atténuer ses effets en agissant sur la décomposition de  $f$  en une famille génératrice de fonctions, comme les bases (bi)orthogonales ou les repères de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Si cette famille est adaptée à la représentation de  $f$ , l'image *pure* est alors représentée par peu de coefficients alors que le bruit se répartit uniformément sur ceux-ci. En d'autres mots, la décomposition obtenue décorrèle l'information importante de celle associée au bruit.

<sup>5</sup>Idealement, un bruit blanc additif gaussien.

Dès lors, par un seuillage, une modification ou une sélection appropriée de ces coefficients, la reconstruction réalisée ensuite favorise les éléments propres à l'image non bruitée. L'énergie du bruit est donc minimisée.

Ce schéma a été proposé par de multiples auteurs depuis une dizaine d'années (voir par exemple [MH92, SFA92, BCM99, DJ94, Don95, SCD02]). Un élément clé des méthodes proposées est souvent la recherche d'une base de fonctions représentant au mieux l'image (critère de *sparsité* [Don98, LM03]).

Par exemple, la technique des *curvelets*, introduite par E. Candes et D. Donoho [CD99, SCD02], minimise le nombre de coefficients nécessaires à la description de courbes régulières définissant les contours d'objets dans une image. Pour ce faire, l'image est décomposée sur une base obtenue par translation, rotation et dilatation *parabolique*<sup>6</sup> d'une même fonction mère.

Toutefois, et nous le montrons dans cette section, les repères semi-continus d'ondelettes directionnelles permettent d'obtenir des images débruitées de bonne qualité en comparaison avec les méthodes existantes. Ce constat tient en deux points :

- les éléments orientés d'une image, comme les contours d'objets, sont également bien représentés par des ondelettes directionnelles ;
- ce type de repère offre une haute redondance dans la représentation de  $f$  ce qui assure la diminution de l'énergie du bruit dans la phase de seuillage des coefficients.

Nous optons ici pour un seuillage "dur" (*hard thresholding*) des coefficients en ondelettes de  $f$ , technique utilisée également dans [SCD02] dans le contexte d'une analyse d'images par curvelets.

Prenons le modèle d'un bruitage additif de niveau  $\sigma$

$$f_\sigma(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sigma\epsilon(\vec{x}), \quad (4.73)$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\epsilon(\vec{x})$  est un bruit blanc gaussien tel que  $\epsilon(\vec{x}) \sim N(0, 1)$  pour chaque  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Puisque la transformée continue en ondelettes est une transformation linéaire de la fonction analysée (une convolution), le bruit présent dans les coefficients  $W_{j,n}$  est tel que

$$\sigma_{j,n} = \sigma \|\psi_{j,n}\| = \frac{\sigma}{a_j} \|\psi\|, \quad (4.74)$$

avec  $\sigma_{j,n}$  la déviation standard du bruit dans chaque  $W_{j,n}(\vec{b})$ . Ce résultat provient de la théorie des processus stochastiques. Il est une conséquence du théorème de Wiener-Khintchine [Pap86] et de l'influence d'un filtrage linéaire sur une fonction aléatoire.

Définissons l'opérateur de *seuillage* (dur)  $\mathcal{T}$  par

$$\mathcal{T}[t]v = \begin{cases} v & \text{si } |v| > t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.75)$$

Le processus de débruitage de la fonction  $f_\sigma$  est défini de la manière suivante.

<sup>6</sup>La fonction mère est dilatée d'un facteur  $a \in \mathbb{R}_+^*$  dans une direction et de  $\sqrt{a}$  dans la direction perpendiculaire.

1. Estimation du niveau de bruit  $\sigma$  (non nécessairement connu) présent dans  $f_\sigma$ .
2. Initialisation de la décomposition en ondelettes : le nombre de résolutions  $J > 0$  et le nombre d'angles  $N > 0$  sont fixés ;
3. Décomposition de  $f_\sigma$  en ses coefficients  $S_{-J}, W_{j,n}$  et  $H_n$  pour  $j \in [-J + 1, 0]$  et  $n \in \mathbb{Z}[N]$  ;
4. Formation des coefficients seuillés  $\tilde{W}_{j,n}$  et  $\tilde{H}_n$  à l'aide de

$$\tilde{W}_{j,n}(\vec{b}) = \mathcal{T}[\kappa \frac{\sigma}{a_j} \|\psi\|] W_{j,n}(\vec{b}) \quad (4.76)$$

$$\tilde{H}_n(\vec{b}) = \mathcal{T}[\kappa \sigma \|\eta_n\|] H_n(\vec{b}), \quad (4.77)$$

où  $\kappa$  est le *niveau de seuillage*. Il s'agit d'un paramètre de l'ordre de l'unité. Empiriquement, de bons résultats sont atteints pour  $\kappa = 2.5$ . D'autres choix sont cependant possibles comme celui du VisuShrink (seuillage universel) établi par D. Donoho [DJ94] où  $\kappa = \sqrt{2 \log S}$  avec  $S$  le nombre de pixels dans l'image<sup>7</sup>. La partie basse fréquence  $S_{-J}$  n'est pas seuillée dans la mesure où le niveau de bruit de cette composante est assez faible.

5. Reconstruction de la fonction  $f_e$  débruitée sur base des coefficients  $\tilde{W}_{j,n}, \tilde{H}_n$  et  $S_{-J}$  et de la formule de reconstruction (4.62), c.-à-d.

$$f_e(\vec{x}) = (S_{-J} * \zeta_{-J})(\vec{x}) + \sum_{j=-J+1}^{j_\psi-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [\tilde{W}_{j,n} * \psi_{j,n}](\vec{x}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} [\tilde{H}_n * \eta_n](\vec{x}), \quad (4.78)$$

Pour revenir sur le premier point de la méthode, la déviation standard de l'image originale est évaluée grâce à l'estimateur RME (*Robust Median Estimator*) [DJ94, Tas00]. Ce dernier exploite l'idée que, à l'inverse du signal, le bruit est prépondérant à hautes fréquences.

Ainsi, à une dimension et dans un contexte discret, si un signal  $s[n] \in l^2([0, N])$  se voit entaché d'un bruit blanc gaussien  $\epsilon[n] \sim N(0, \sigma^2)$ , c.-à-d.

$$s_\epsilon[n] = s[n] + \epsilon[n], \quad (4.79)$$

avec  $s_\epsilon$  le signal bruité, alors la déviation standard  $\sigma_\epsilon$  de ce bruit peut être estimée à l'aide d'un filtre passe-haut  $h[n] \in l^2([0, N])$ . L'estimateur proposé est donné par

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{\text{med } |h * s|}{0.6745 \|h\|}, \quad (4.80)$$

où  $*$  est la convolution discrète, et où la médiane *med* est à prendre sur l'ensemble des points de  $h * s$ .

<sup>7</sup>Ce seuillage est cependant généralement trop élevé mais, associé à un seuillage doux (*soft thresholding*), il assure une meilleure régularité de l'image débruitée [CYV00].

Le biais de cet estimateur est d'autant plus faible que  $\text{supp}(\hat{h})$  est éloigné de la fréquence nulle, dans la mesure où la proportion de composantes hautes fréquences associées au bruit est généralement plus grande que celle des composantes hautes fréquences du signal réel. Cet estimateur se généralise sans peine au cas des signaux bidimensionnels.

Pour mesurer la qualité de l'image débruitée  $f_e$ , trois quantités sont traditionnellement employées : le SNR (*Signal to Noise Ratio*), le PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) ou la MSE (*Mean Square Error*). Celles-ci sont définies par

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{\sigma_f}{\sigma_e} \quad (4.81)$$

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \frac{\|f\|_\infty}{\sigma_e} \quad (4.82)$$

$$\text{MSE} = \|f - f_e\|^2, \quad (4.83)$$

où  $\sigma_f$  est la déviation standard de l'image et  $\sigma_e$  la déviation standard du bruit restant dans  $f_e$ , c.-à-d.  $\sigma_e^2 = E[(f - f_e)^2]$  en supposant  $f$  de moyenne nulle. Au vu de ces définitions, un débruitage optimal doit maximiser le *SNR* et le *PSNR* et minimiser l'erreur *MSE*. Ces différentes quantités sont cependant inaptées à détecter la présence d'artefacts gênant dans l'image débruitée. Par conséquent, il est souvent nécessaire d'ajouter une estimation visuelle de la qualité du débruitage.

Pour tester la méthode décrite plus haut, l'image de Lenna (de taille  $512 \times 512$  [Len]) a premièrement été bruitée par l'ajout d'un bruit blanc gaussien de déviation standard connue ( $\sigma = 20$ , PSNR=22.13 dB). L'estimateur RME n'a donc pas été employé dans ce cas<sup>8</sup>. L'image a ensuite été décomposée à l'aide du repère conique CMW ( $p = 0, q = 1$ ) sur  $J = 5$  niveaux d'échelles et pour  $N = 16$  orientations, pour finalement donner lieu à une image débruitée  $f_e$  par seuillage et reconstruction. Les résultats sont présentés sur la Figure 4.2 en comparaison avec quelques méthodes connues de débruitage, à savoir :

1. Le filtrage de Wiener idéal où  $f_e$  est évalué à l'aide de

$$f_e = \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{f}_\sigma \frac{|\hat{f}|^2}{|\hat{f}|^2 + \sigma^2} \right], \quad (4.84)$$

avec  $\mathcal{F}$  représentant la transformée de Fourier.

2. Un débruitage par décomposition dans une base orthogonale d'ondelettes (*Symmetlet* 4) dans une analyse multirésolution décimée (UDWT<sup>9</sup>) et non décimée (DWT<sup>10</sup>). Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'annexe B pour une brève introduction à cette théorie dans le cas unidimensionnel.
3. Un débruitage par Curvelets [CD99] sur base des résultats trouvés en [SCD02].

<sup>8</sup>Notons que sur notre exemple, cet estimateur donne une valeur  $\sigma = 20.34$  assez proche de la réalité.

<sup>9</sup>Undecimated Discrete Wavelet Transform.

<sup>10</sup>Discrete Wavelet Transform

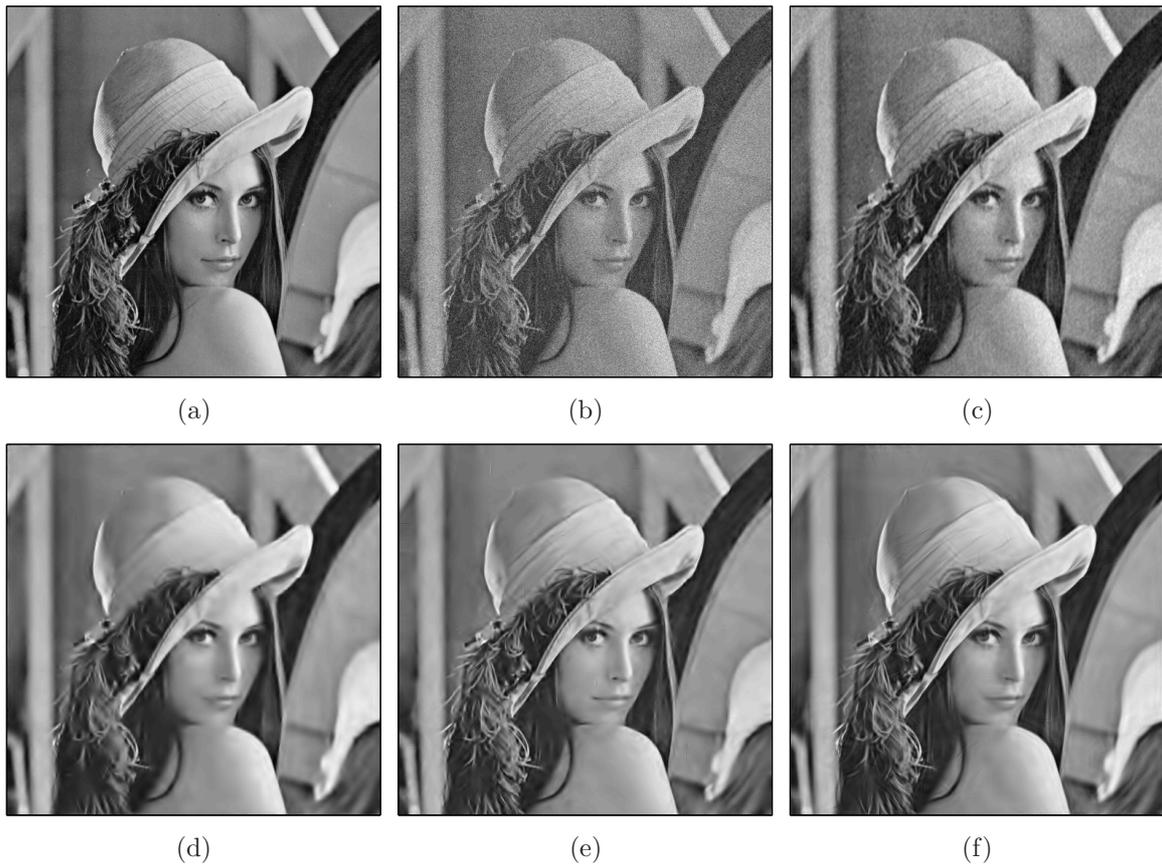


FIG. 4.2 – Débruitages de l'image de Lenna. (a) Image originale. (b) Image bruitée (PSNR=22.13 dB). (c) Débruitage avec un filtrage de Wiener idéal (30.81). (d) Débruitage par transformée en ondelettes discrètes non décimée (Symmlet 4, PSNR=27.44 dB). (e) Débruitage par Curvelet [SCD02] (PSNR=31.95 dB). (f) Débruitage avec un repère conique CMW ( $J = 5$ ,  $N = 16$ ,  $p = 0$ ,  $q = 1$ , PSNR=32.02 dB).

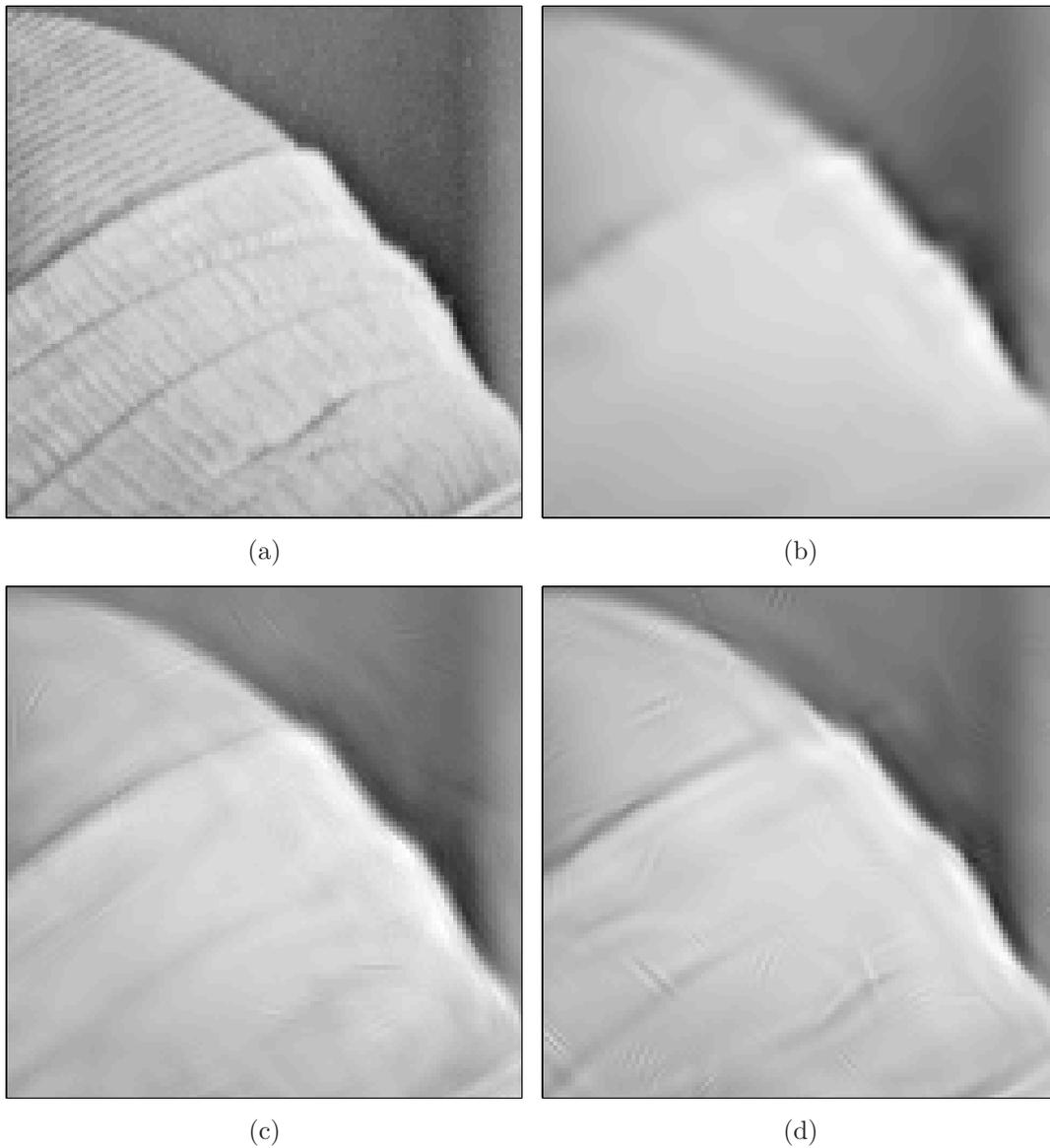


FIG. 4.3 – Zoom sur les différents débruitages de l'image de Lenna. (a) Zoom sur l'image originale. (b) Débruitage par transformée en ondelettes discrètes non décimée (Symmlet 4, PSNR=27.44 dB). (c) Débruitage par Curvelet [SCD02] (PSNR=31.95 dB). (d) Débruitage avec un repère conique CMW ( $J = 5$ ,  $N = 16$ ,  $p = 0$ ,  $q = 1$ , PSNR=32.02 dB).

Des zooms sur une partie de l'image et sur les différentes reconstructions sont aussi affichés à la Figure 4.3. Les différents PSNR établis entre celles-ci et l'image originale sont présentés sur le tableau 4.1.

Méthode	PSNR	Remarque
Image bruitée	22.13 dB	-
Filtre idéal de Wiener	30.81 dB	Bruit à basses fréquences
WT Symlet 4	27.44 dB	Artefacts
UWT Symlet 4	29.38 dB	Mauvaise reconstruction des contours
Curvelets method (blocs de 16 pixels) [SCD02]	31.95 dB	Légers artefacts
Repère CMW ( $p = 0, q = 1$ ) :		
J=5, N=8	31.81 dB	Légers artefacts
J=5, N=16	32.02 dB	Légers artefacts
J=5, N=32	31.92 dB	Artefacts

TAB. 4.1 – Comparaison de plusieurs méthodes de débruitage d'images sur l'exemple de Lenna bruité.

Nous constatons les points suivants :

- Le filtrage idéal de Wiener, bien qu'intéressant au niveau du PSNR atteint, contient encore du bruit à basse fréquences. Ceci se perçoit sur la Figure 4.2(c) dans les zones de l'image lisses en l'absence de bruit (ex : l'épaule de Lenna).
- Le débruitage issu de la base orthogonale d'ondelettes discrètes Symmlet 4 est surtout appréciable dans le cas non décimé (Tab. 4.1) de par l'ajout de redondance dans la décomposition. L'absence d'une véritable directionnalité dans cette méthode induit cependant une mauvaise reconstruction des courbes et des contours d'objets (cfr. les détails du chapeau sur la Figure 4.3(b)).
- Le repère conique CMW donne des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus avec une décomposition en Curvelets. Ceci se perçoit au travers des PSNR correspondants, avec 31.95 dB pour le schéma Curvelet et 32.02 dB pour le repère CMW, et par comparaison visuelle des images 4.2(e) et 4.2(f), et des zooms 4.3(c) et 4.3(d). Le tableau 4.1 montre cependant qu'il existe une limite à la qualité du débruitage lorsque le nombre d'orientations augmente. De légers artefacts apparaissent en outre avec le repère conique. Le bruit crée des variations légèrement orientées là où l'image pure est lisse. La reconstruction engendre des erreurs ayant la forme des ondelettes employées. La méthode Curvelet contient également ce genre de phénomènes dans une moindre mesure.

$p \backslash q$	0	1	2
0	31.81 dB	31.81 dB	31.77 dB
1	31.64 dB	31.63 dB	31.59 dB
2	31.44 dB	31.44 dB	31.40 dB

TAB. 4.2 – Comparaison des PSNR atteints lors du débruitage de l'image de Lenna avec un repère CMW ( $J = 4$ ,  $N = 8$ ) pour différentes valeurs de  $p$  et de  $q$ .

Pour terminer cette section, nous avons testé la qualité du débruitage de l'image de Lenna en fonction des paramètres de régularité  $p$  et  $q$  du repère conique CMW. Il semblerait que dans cet exemple<sup>11</sup>, le débruitage gagne en qualité lorsque la régularité de l'ondelette diminue (radialement ou angulairement). L'influence de la régularité radiale  $p$  sur les PSNR semble en outre plus forte que celle de la régularité angulaire  $q$ .

### 4.3.5 Conclusion

Nous avons vu dans cette section comment définir des repères semi-continus de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  contenant des ondelettes directionnelles. Nous avons ensuite construit le repère conique CMW en se basant sur les propriétés particulières de la fonction  $\beta_s$  donnée en (4.67).

Dans le contexte du débruitage d'images contaminées par un bruit additif gaussien, la qualité des images nettoyées par ce repère est comparable à celles obtenues par des techniques se basant, soit sur la forme et la directionnalité des filtres employés (curvelets, ridgelets, ...), soit sur la redondance d'une transformée en ondelettes discrète (UWT).

L'avantage d'un repère semi-continu d'ondelettes directionnelles est en réalité de miser sur ces deux aspects en même temps, autrement dit,

- sur l'importance de la redondance dans la décomposition de l'image pour éliminer au mieux les effets du bruit par le seuillage des coefficients en ondelettes ;
- et sur l'utilité de la sélectivité angulaire des filtres ondelettes pour améliorer la représentations des contours d'objets dans l'image.

## 4.4 Repères d'ondelettes multisélectifs sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ $\square$

Dans un repère d'ondelettes directionnelles classique, qu'il soit discret ou semi-continu, les ondelettes partagent toutes la même sélectivité angulaire, leurs supports fréquentiels étant inclus à des cônes de même ouverture angulaire.

Il peut cependant être utile de disposer d'un outil à "sélectivité angulaire variable" pouvant s'adapter localement au contenu de la fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Cette dernière, vue comme une image, peut en effet présenter à la fois :

- des comportements très directionnels comme des segments de droites,

<sup>11</sup>Une étude plus systématique sur différents types d'images reste à réaliser.

- des objets isotropes comme des singularités ponctuelles ou des gaussiennes,
- des phénomènes à mi-chemin entre ces deux extrêmes comme des courbes ou des éléments texturés.

Chacun de ces objets est mieux représenté par des ondelettes de sélectivités angulaires différentes. Avec des ondelettes directionnelles, les coefficients issus d'un objet isotrope en un point et une échelle donnés sont en effet tous de même valeur, ce qui augmente inutilement le nombre de coefficients de cette décomposition. Une courbe par contre donne d'autant plus de coefficients en ondelettes non nuls en un point et une échelle fixés que son rayon de courbure local est faible (Sec. 3.2).

#### 4.4.1 Point de vue continu $\square$

Soit une image  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et une ondelette admissible  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . Pour rappel, la transformée continue en ondelettes de  $f$  est donnée par

$$W_f(\vec{b}, a, \theta) = \langle \psi_{\vec{b}, a, \theta} | f \rangle \quad (4.85)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \psi^*\left(r_\theta^{-1} \frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}\right) f(\vec{x}) \quad (4.86)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{\psi}^*(a r_\theta^{-1} \vec{k}) \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{b}}. \quad (4.87)$$

Supposons que l'ondelette mère  $\psi$  soit séparable polairement en fréquence, c.-à-d.

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \rho(k) \varphi(\kappa), \quad (4.88)$$

avec deux fonctions  $\rho : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , et en employant les notations  $\vec{k} = (k, \kappa)$ ,  $k = \|\vec{k}\|$ , et  $\kappa = \arg \vec{k}$ .

Si le support de  $\varphi$  est bien localisé, l'ondelette  $\psi$  est une ondelette directionnelle dont la sélectivité angulaire est inversement proportionnelle à la largeur du support de  $\varphi$  (Sec. 2.3.4).

Grâce à cette ondelette, nous obtenons

$$W_f(\vec{b}, a, \theta) = \int_{\mathbb{R}_+ \times S_1} k dk d\kappa \rho^*(ak) \varphi_\theta^*(\kappa) \hat{f}(k, \kappa) e^{i kb \cos(\kappa - \beta)}, \quad (4.89)$$

avec  $\varphi_\theta(\kappa) = \varphi(\kappa - \theta)$ ,  $b = \|\vec{b}\|$  et  $\beta = \arg \vec{b}$ .

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$W_f(\vec{b}, a, \theta) = \langle \varphi_\theta | R_{\vec{b}, a} \rangle_{S_1}, \quad (4.90)$$

en posant

$$R_{\vec{b}, a}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}_+} k dk \rho^*(ak) \hat{f}(k, \kappa) e^{i kb \cos(\kappa - \beta)}, \quad (4.91)$$

et avec  $\langle f | g \rangle_{S_1} = \int_{S_1} d\kappa f^*(\kappa)g(\kappa)$ . Par la suite, le label  $S_1$  du produit scalaire sera omis lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

La transformée continue en ondelettes de  $f$  avec l'ondelette  $\psi$  définie en (4.88) équivaut par conséquent à la projection de  $R_{\vec{b},a}$  sur une fonction  $\varphi_\theta$  localisée sur l'angle  $\theta \in S_1$ .  $W_f(\vec{b}, a, \theta)$  est en quelque sorte une *approximation angulaire* de la fonction  $R_{\vec{b},a}$  à l'aide de la fonction (d'échelle)  $\varphi$ .

Poursuivant dans cette direction, il est maintenant très tentant d'ajouter une dilatation à ce schéma. Si  $\varphi$  est la périodisation d'une fonction  $\nu$  sur  $\mathbb{R}$ , nous pouvons par exemple dilater  $\varphi$  en dilatant  $\nu$  [Hol90], autrement dit

$$\varphi_\epsilon(\kappa) = D_\epsilon \varphi(\kappa) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu\left(\frac{\kappa}{\epsilon} - n\right), \quad (4.92)$$

pour une certaine fonction  $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et pour  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ .

Dans ce cas, nous obtenons les nouveaux coefficients

$$W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta) = \langle \varphi_{\epsilon,\theta} | R_{\vec{b},a} \rangle, \quad (4.93)$$

avec  $\varphi_{\epsilon,\theta}(\kappa) = \varphi_\epsilon(\kappa - \theta)$ .

Naturellement, la redondance de cette nouvelle transformée est fortement augmentée. Cependant, pour chaque  $\epsilon > 0$ , nous analysons  $f$  au moyen d'une ondelette

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \rho(k) \varphi_\epsilon(\kappa) \quad (4.94)$$

dont la sélectivité angulaire est contrôlée par  $\epsilon^{-1}$ .

Il est raisonnable de supposer que les zones de  $f$  localement (quasi)isotropes sont mieux représentées par une ondelette avec un  $\epsilon$  élevé, tandis que des objets orientés sont associés à un  $\epsilon$  faible. Une idée intéressante serait donc d'adapter la valeur de  $\epsilon$  au point  $\vec{b}$  et à l'échelle  $a$  considérée. Les sections suivantes montrent comment parvenir à nos fins à l'aide d'une analyse multirésolution circulaire.

#### 4.4.2 Analyse multirésolution biorthogonale sur $C_1$

Nous utilisons dans cette section la théorie des bases d'ondelettes biorthogonales développée brièvement à l'annexe B.

Prenons une analyse multirésolution biorthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  (cfr. annexe B) déterminée par une fonction d'échelle  $\phi$  et par une ondelette  $\chi$  auxquelles sont associées les fonctions duales  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$ . A ces fonctions correspondent respectivement les filtres discrets  $h$ ,  $g$ ,  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  intervenant dans les relations d'échelle (B.6), (B.7), (B.35) et (B.36), avec  $g$  et  $\tilde{g}$  définis par (B.42).

Il est possible d'utiliser cette base biorthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  pour réaliser une analyse multirésolution de  $L^2(C_1)$ , où  $C_1$  est le cercle identifié<sup>12</sup> avec  $[0, 1[$  [Dau92].

<sup>12</sup>Nous réservons la notation  $S_1$  pour le cercle identifié avec l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

Pour ce faire, considérons la fonction périodisée

$$\phi_{l,n}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{l,n}(t+m), \quad (4.95)$$

où la notation  $u_{l,n}(t) = 2^{l/2}u(2^l t - n)$  est appliquée à toute fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $l, n \in \mathbb{Z}$ . Les fonctions  $\chi$ ,  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$  peuvent être traitées de la même manière pour donner lieu, dans l'ordre, aux fonctions périodiques  $\chi_{l,n}$ ,  $\tilde{\phi}_{l,n}$  et  $\tilde{\chi}_{l,n}$ .

Ceci permet la création des sous-espaces  $\mathbf{V}_l$  et  $\mathbf{W}_l$  de  $L^2(C_1)$  et générés respectivement par les familles  $\{\phi_{l,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\chi_{l,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ . Les sous-espaces duaux  $\tilde{\mathbf{V}}_l$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_l$ , également dans  $L^2(C_1)$ , sont quant à eux générés respectivement par les familles  $\{\tilde{\phi}_{l,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\tilde{\chi}_{l,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ .

Pour  $l > 0$ , chacun de ces sous-espaces est de dimension finie. En effet, pour toute fonction  $u \in L^2(\mathbb{R})$  et pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbf{u}_{l,n+2^l r}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{l,n+2^l r}(t+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{l,n}(t+m-r) = \mathbf{u}_{l,n}(t).$$

Dès lors,  $\mathbf{V}_l$  et les autres sous-espaces de même résolution sont de dimension  $2^l$  car générés par  $2^l$  fonctions.

En outre, lorsque  $l \leq 0$ ,  $V_l$  se réduit uniquement à l'espace des fonctions constantes sur  $C_1$ , et  $W_l$  à la fonction nulle pour  $l < 0$ . Pour comprendre ce point, nous devons utiliser la proposition suivante [Dau92].

**Proposition 4.9.** *S'il existe un  $\epsilon > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que  $|\phi(t)| \leq C(1+|t|)^{-1-\epsilon}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(t-m) = 1 \quad (4.96)$$

si et seulement si

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} h[m] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[2m+1] = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.97)$$

En outre si  $\tilde{h}$  vérifie l'équation (4.97), alors

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi\left(t - \frac{m}{2}\right) = 0. \quad (4.98)$$

La preuve de cette proposition est donnée à l'annexe A (Sec. A.4, p. 174).

Autrement dit, si  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  partitionnent l'unité et vérifient (4.96), ce qui équivaut à demander que les fonctions constantes appartiennent à tous les  $V_l$  et  $\tilde{V}_l$  (Sec. B.1), alors  $h$  et  $\tilde{h}$  satisfont (4.97), et les ondelettes  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  respectent (4.98). Par conséquent,

$$\phi_{l,n}(t) = 2^{-\frac{l}{2}}, \quad \forall l \leq 0, \quad (4.99)$$

$$\chi_{l,n}(t) = 0, \quad \forall l < 0, \quad (4.100)$$

pour tout  $t \in C_1$ . En effet, si  $l \leq 0$ ,

$$\begin{aligned}\phi_{l,n}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{l}{2}} \phi(2^l t + 2^l m - n) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=0}^{2^{-l-1}} 2^{\frac{l}{2}} \phi(2^l t + 2^l q - n + p) \\ &= 2^{\frac{l}{2}} \sum_{q=0}^{2^{-l-1}} 1 \\ &= 2^{-\frac{l}{2}},\end{aligned}$$

en posant  $m = 2^{-l}p + q$ . Le raisonnement est similaire pour démontrer (4.100) en posant  $m = 2^{-l-1}p + q$  (avec  $l < 0$ ) dans le développement de  $\chi_{l,n}(t)$ . Ces résultats sont également transposables à  $\tilde{\phi}_{l,n}$  et  $\tilde{\chi}_{l,n}$ .

**Proposition 4.10.** *Les fonctions d'échelle  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$ , et les ondelettes  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$ , vérifient les relations d'échelle suivantes :*

$$\phi_{l-1,n}(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} h_l[q - 2n] \phi_{l,q}(t), \quad \chi_{l-1,n}(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} g_l[q - 2n] \phi_{l,q}(t), \quad (4.101)$$

$$\tilde{\phi}_{l-1,n}(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}_l[q - 2n] \tilde{\phi}_{l,q}(t), \quad \tilde{\chi}_{l-1,n}(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}_l[q - 2n] \tilde{\phi}_{l,q}(t), \quad (4.102)$$

avec  $l \in \mathbb{N}^0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $s_l[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} s[n + 2^l m]$  pour toute séquence discrète  $s \in l^2(\mathbb{Z})$ .

La preuve est donnée à l'annexe A (Sec. A.4, p. 175). Par conséquent, nous avons bien les inclusions  $\mathbf{V}_{l-1} \subset \mathbf{V}_l$ ,  $\mathbf{W}_{l-1} \subset \mathbf{V}_l$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}_{l-1} \subset \tilde{\mathbf{V}}_l$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_{l-1} \subset \tilde{\mathbf{V}}_l$ .

**Proposition 4.11.** *Les fonctions d'échelles  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  vérifient les formules de reconstructions*

$$\phi_{l+1,n}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}_{l+1}[n - 2m] \phi_{l,m}(t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}_{l+1}[n - 2m] \chi_{l,m}(t) \quad (4.103)$$

$$\tilde{\phi}_{l+1,n}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}[2^l]} h_{l+1}[n - 2m] \tilde{\phi}_{l,m}(t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}[2^l]} g_{l+1}[n - 2m] \tilde{\chi}_{l,m}(t), \quad (4.104)$$

pour  $l \in \mathbb{N}^0$  et  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$ .

La preuve est donnée à l'annexe A (Sec. A.4, p. 176). Ceci confirme que  $\mathbf{V}_{l+1} = \mathbf{V}_l \oplus \mathbf{W}_l$  et que  $\tilde{\mathbf{V}}_{l+1} = \tilde{\mathbf{V}}_l \oplus \tilde{\mathbf{W}}_l$ .

Les espaces  $\mathbf{V}_l$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_l$ , ainsi que  $\mathbf{W}_l$  et  $\tilde{\mathbf{V}}_l$ , restent orthogonaux. En effet, pour deux

fonctions  $u$  et  $v$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_{l,n} | \mathbf{v}_{l',n'} \rangle &= 2^{\frac{l+l'}{2}} \int_0^1 dt \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} u^*(2^l(t+p) - n) v(2^{l'}(t+q) - n') \\
&= 2^{\frac{l+l'}{2}} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \int_p^{p+1} dt u^*(2^l t - n) v(2^{l'}(t+q-p) - n') \\
&= 2^{\frac{l+l'}{2}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dt u^*(2^l t - n) v(2^{l'} t - n' + 2^{l'} q) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \langle u_{l,n} | v_{l,n'-2^{l'}q} \rangle,
\end{aligned}$$

avec  $l, l' \in \mathbb{N}^0$ ,  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$  et  $n' \in \mathbb{Z}[2^{l'}]$ . Le produit scalaire de la première ligne du dernier développement est à prendre sur le cercle  $C_1$ . Il en sera de même par la suite de tout produit scalaire réalisé sur deux fonctions dénotées par des caractères gras.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{l,n} | \tilde{\phi}_{l,n'} \rangle &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \langle \chi_{l,n} | \phi_{l,n'-2^l q} \rangle = 0 \\
\langle \phi_{l,n} | \tilde{\chi}_{l,n'} \rangle &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{l,n} | \chi_{l,n'-2^l q} \rangle = 0,
\end{aligned}$$

pour  $l, l' \in \mathbb{N}^0$ ,  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$  et  $n' \in \mathbb{Z}[2^{l'}]$ .

De plus, pour les mêmes  $l, l', n, n'$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{l,n} | \tilde{\phi}_{l,n'} \rangle &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{l,n} | \tilde{\phi}_{l,n'-2^l q} \rangle = \delta_{n,n'}, \\
\langle \chi_{l,n} | \tilde{\chi}_{l',n'} \rangle &= \delta_{l,l'} \delta_{n,n'},
\end{aligned}$$

où le cas  $l \neq l'$  de la dernière égalité résulte du fait que  $\mathbf{V}_l \perp \tilde{\mathbf{W}}_l$ ,  $\mathbf{W}_l \perp \tilde{\mathbf{V}}_l$ , et des inclusions  $\mathbf{W}_l \subset \mathbf{V}_{l+1}$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_l \subset \tilde{\mathbf{V}}_{l+1}$ .

En conclusion, comme dans le cas non périodique, les fonctions  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$  génèrent bien une analyse multirésolution biorthogonale sur  $L^2(C_1)$  associée aux sous-espaces  $\mathbf{V}_{l-1} \subset \mathbf{V}_l$ ,  $\mathbf{W}_{l-1} \subset \mathbf{V}_l$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}_{l-1} \subset \tilde{\mathbf{V}}_l$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_{l-1} \subset \tilde{\mathbf{V}}_l$ .

Grâce à cette analyse multirésolution circulaire, toute fonction  $f \in L^2(C_1)$  se décompose de la manière suivante

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^L]} \mathbf{c}_L[n] \tilde{\phi}_{L,n}(t) + \sum_{l=L}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \mathbf{d}_l[n] \tilde{\chi}_{l,n}(t), \quad (4.105)$$

pour un  $L \in \mathbb{N}$  fixé, et avec les coefficients  $\mathbf{c}_l[n] = \langle \phi_{l,n} | f \rangle$  et  $\mathbf{d}_l[n] = \langle \chi_{l,n} | f \rangle$ . Remarquons que si  $L = 0$ , la première somme se résume simplement au terme constant

$$\mathbf{c}_0[0] \tilde{\phi}_{0,0}(t) = \langle f \rangle = \int_{C_1} f,$$

puisque  $\phi_{0,0} = 1$ .

Les relations (4.101) induisent des règles de récurrence pour ces derniers coefficients. En effet,

$$\mathbf{c}_l[n] = \bar{h}_l \otimes \mathbf{c}_{l+1}[2n] \quad (4.106)$$

$$\mathbf{d}_l[n] = \bar{g}_l \otimes \mathbf{c}_{l+1}[2n] \quad (4.107)$$

$$(4.108)$$

où  $\bar{s}_l[n] = s_l^*[-n]$  pour toute suite  $s \in l^2(\mathbb{Z}[2^l])$ , et où  $\otimes$  est la convolution circulaire entre deux suites périodiques  $u$  et  $v$  de même période  $P \in \mathbb{N}$  définie par

$$u \otimes v[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}[P]} u[m-n] v[n]. \quad (4.109)$$

En outre, le passage aux coefficients d'une résolution  $l+1$  à partir de ceux de la résolution  $l$  est issu de (4.103) et est réalisé par

$$\mathbf{c}_{l+1}[n] = \tilde{h}_{l+1}^* \otimes \check{\mathbf{c}}_l[n] + \tilde{g}_{l+1}^* \otimes \check{\mathbf{d}}_l[n], \quad (4.110)$$

où  $\check{s}$  est l'opération de sur-échantillonnage définie par

$$\check{s}[n] = \begin{cases} s[\frac{n}{2}] & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.111)$$

Cette opération transforme une suite  $s$  de période  $P \in \mathbb{N}$  en une suite de période  $2P$ . Des règles complètement équivalentes existent pour les coefficients duaux  $\check{\mathbf{c}}_l[n]$  et  $\check{\mathbf{d}}_l[n]$ .

### 4.4.3 Analyse angulaire multisélective $\square$

Montrons maintenant comment une analyse multirésolution (bi)orthogonale sur  $L^2(C_1)$  permet la création d'ondelettes bidimensionnelles directionnelles particulières possédant les propriétés suivantes :

- elles se combinent dans un schéma pyramidal pour former des ondelettes de sélectivité angulaire plus faible jusqu'à l'obtention d'une ondelette totalement isotrope ;
- elles définissent un repère (semi-continu) linéaire (Sec. 4.3.1) pour chaque *niveau de sélectivité* angulaire.

Prenons une analyse multirésolution biorthogonale sur  $L^2(C^1)$  générée par la fonction d'échelle  $\phi$ , l'ondelette  $\chi$  et leurs correspondantes duales. A l'aide de celles-ci, des ondelettes bidimensionnelles de forme (4.88) peuvent être définies par

$$\hat{\psi}_{l,n}^a(\vec{k}) = \rho(k) \varphi_{l,n}(\kappa), \quad (4.112)$$

$$\hat{\psi}_{l,n}^d(\vec{k}) = \rho(k) \gamma_{l,n}(\kappa), \quad (4.113)$$

avec  $\vec{k} = (k, \kappa)$  en coordonnées fréquentielles polaires, et où

$$\varphi_{l,n}(\kappa) = \Phi_{l,n}\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right), \quad (4.114)$$

$$\gamma_{l,n}(\kappa) = \chi_{l,n}\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right), \quad (4.115)$$

sont les transpositions des fonctions  $\Phi_{l,n}$  et  $\chi_{l,n}$  sur le cercle  $S_1 \simeq [0, 2\pi[$ . L'exposant "a" apparaissant dans (4.112), rappelle que l'ondelette  $\psi^a$  résulte angulairement d'une fonction d'*approximation*  $\varphi$ , tandis que l'exposant  $d$  dans l'équation suivante souligne que  $\psi^d$  est liée à la fonction de *détails* (l'ondelette)  $\gamma$ .

Observons maintenant le rôle des différents paramètres de ces nouvelles ondelettes. Toute d'abord, le paramètre  $n$  devient un paramètre de rotation d'angle  $\theta_n = n\frac{2\pi}{2^l}$ . En effet,

$$\hat{\psi}_{l,n}^a(\vec{k}) = \rho(k) \varphi_{l,n}(\kappa) = \rho(k) \varphi_{l,0}(\kappa - n\frac{2\pi}{2^l}) = \hat{\psi}_{l,0}^a(r_n^{-1}\vec{k}), \quad (4.116)$$

avec  $r_\theta$  la matrice de rotation d'angle  $\theta$ .

Ensuite, nous remarquons que si  $l$  est suffisamment grand pour que les fonctions  $\varphi_{l,n}$  et  $\gamma_{l,n}$  ne se replient pas sur elles-mêmes par périodisation, les ondelettes (4.112) et (4.113) sont clairement directionnelles puisque  $\Phi_{l,n}$  et  $\chi_{l,n}$  sont bien localisées sur le cercle<sup>13</sup>. En outre, puisque la *sélectivité angulaire* d'une ondelette directionnelle, c.-à-d. sa capacité à distinguer des orientations proches, est inversement proportionnelle à l'ouverture angulaire du cône supportant l'ondelette en fréquence (Sec. 2.3.3), le paramètre  $l$  s'interprète directement comme un *niveau de sélectivité* angulaire. Une grande valeur de  $l$  implique en effet un cône étroit, et donc une haute sélectivité angulaire.

Les ondelettes (4.112) et (4.113) peuvent être employées pour décomposer une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . En discrétisant uniquement les échelles de manière dyadique (Sec. 4.3), c.-à-d. en prenant  $a_j = \frac{a_0}{2^j}$ , ces ondelettes définissent les nouveaux coefficients

$$W_{j,l,n}^a(\vec{b}) = \langle \psi_{b,j,l,n}^a | f \rangle, \quad (4.117)$$

$$W_{j,l,n}^d(\vec{b}) = \langle \psi_{b,j,l,n}^d | f \rangle, \quad (4.118)$$

avec

$$\psi_{b,j,l,n}^a(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \psi_{l,n}^a\left(\frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}\right), \quad (4.119)$$

et de même pour  $\psi_{b,j,l,n}^d(\vec{x})$ .

Si nous reprenons le point de vue continu développé à la section 4.4.1, les coefficients ci-dessus se réécrivent

$$W_{j,l,n}^a(\vec{b}) = \langle \varphi_{l,n} | R_{\vec{b},j} \rangle, \quad (4.120)$$

$$W_{j,l,n}^d(\vec{b}) = \langle \gamma_{l,n} | R_{\vec{b},j} \rangle, \quad (4.121)$$

<sup>13</sup>Elles sont même coniques, au sens défini en 2.3.4, si  $\phi$  et  $\chi$  sont à supports compacts.

où le produit scalaire est réalisé sur  $S_1$ , et avec l'abus de notation  $R_{\vec{b},j}(\kappa) = R_{\vec{b},a_j}(\kappa)$ .

Ceci montre qu'en un point  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  et en une échelle  $a_j$  fixés, les coefficients  $W_{j,l,n}^a(\vec{b})$  et  $W_{j,l,n}^d(\vec{b})$  peuvent véritablement s'interpréter comme des coefficients d'approximation et de détail de la fonction angulaire  $R_{\vec{b},j}(\kappa)$ .

**Proposition 4.12.** *Si*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho(a_j k) = c, \quad \forall k \in \mathbb{R}_+, \quad (4.122)$$

pour  $c \in \mathbb{R}^*$ , alors, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , la famille

$$\{\psi_{\vec{b},j,l,n}^a : \vec{b} \in \mathbb{R}^2, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n < 2^l\}, \quad (4.123)$$

est un repère (semi-continu) linéaire de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  au sens de (4.54), c.-à-d.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \hat{\psi}_{l,0}^a(a_j r_{\theta_n}^{-1} \vec{k}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \hat{\psi}_{l,n}^a(a_j \vec{k}) = 2^{\frac{l}{2}} c, \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.124)$$

avec  $\theta_n = n \frac{2\pi}{2^l}$ .

La démonstration assez immédiate figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 176).

Par conséquent, si la condition (4.122) est vérifiée, alors, pour tout  $l \in \mathbb{N}$  fixé, une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est décomposée selon

$$f(\vec{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} 2^{-\frac{l}{2}} W_{j,l,n}^a(\vec{x}). \quad (4.125)$$

#### 4.4.4 Règles de récurrence $\square$

Les ondelettes à sélectivité variable  $\psi_{l,n}^a$  et  $\psi_{l,n}^d$  héritent des règles de récurrence des fonctions  $\phi_{l,n}$  et  $\chi_{l,n}$ . En effet, à partir de (4.101), il est facile de montrer que

$$\psi_{l-1,n}^a(\vec{x}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} h_l[n' - 2n] \psi_{l,n'}^a(\vec{x}), \quad (4.126)$$

$$\psi_{l-1,n}^d(\vec{x}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} g_l[n' - 2n] \psi_{l,n'}^d(\vec{x}). \quad (4.127)$$

En outre, à partir de la reconstruction (4.103),

$$\psi_{l+1,n}^a(\vec{x}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}_l[n - 2n'] \psi_{l,n'}^a(\vec{x}) + \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}_l[n - 2n'] \psi_{l,n'}^d(\vec{x}). \quad (4.128)$$

Par conséquent, et comme annoncé plus haut, les ondelettes de niveau  $l$

- se combinent en engendrant des ondelettes de niveau  $l - 1$  et de sélectivité angulaire réduite de moitié (Equations (4.126) et (4.127)),

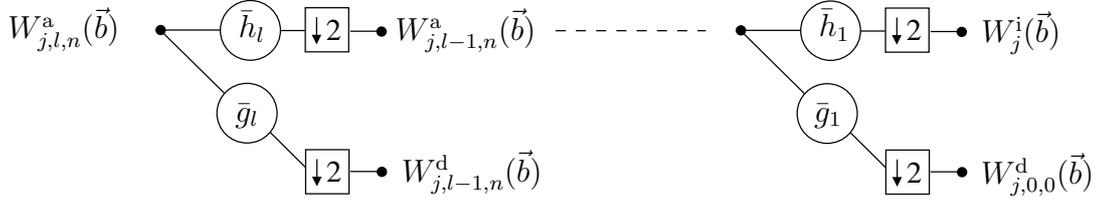


FIG. 4.4 – Décomposition des coefficients en ondelettes selon leur niveau de sélectivité.

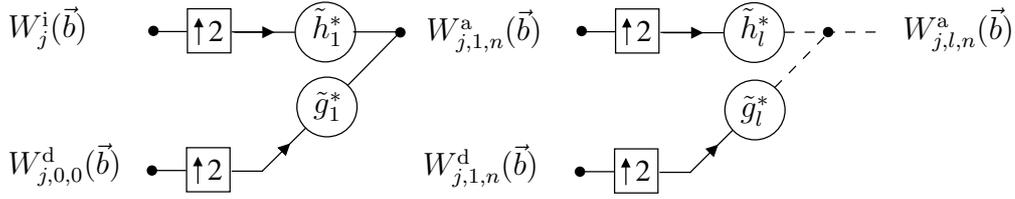


FIG. 4.5 – Reconstruction des coefficients en ondelettes selon leur niveau de sélectivité.

- génèrent des ondelettes de niveau  $l$  et de sélectivité angulaire double (Equation (4.128)).

En projetant  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  sur ces trois dernières équations, nous obtenons pour les coefficients en ondelettes

$$W_{j,l-1,n}^a(\vec{b}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} h_l^*[n' - 2n] W_{j,l,n'}^a(\vec{b}) = (\bar{h}_l \otimes W_{j,l,\cdot}^a(\vec{b}))_{2n} \quad (4.129)$$

$$W_{j,l-1,n}^d(\vec{b}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} g_l^*[n' - 2n] W_{j,l,n'}^a(\vec{b}) = (\bar{g}_l \otimes W_{j,l,\cdot}^a(\vec{b}))_{2n}, \quad (4.130)$$

lors de la décomposition vers une sélectivité plus faible. La reconstruction d'une sélectivité plus élevée s'obtient par

$$W_{j,l+1,n}^a(\vec{b}) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}_{l+1}^*[n - 2n'] W_{j,l,n'}^a(\vec{b}) + \dots \\ \sum_{n' \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}_{l+1}^*[n - 2n'] W_{j,l,n'}^d(\vec{b}) \quad (4.131)$$

$$= (\tilde{h}_{l+1}^* \otimes \widetilde{W}_{j,l,\cdot}^a(\vec{b}))_n + (\tilde{g}_{l+1}^* \otimes \widetilde{W}_{j,l,\cdot}^d(\vec{b}))_n. \quad (4.132)$$

Dans cette dernière relation, l'opérateur de sur-échantillonnage  $\tilde{\cdot}$  ainsi que la convolution circulaire  $\otimes$  agissent sur le dernier paramètre des coefficients, tandis que la notation  $(\cdot)_n$  indique que l'orientation  $n$  des coefficients est sélectionnée.

Toutes ces règles de récurrence réalisent un schéma pyramidal de décomposition et de reconstruction des coefficients en ondelettes selon leur niveau de sélectivité angulaire. Ceci

est illustré par les Figures 4.4 et 4.5. Les symboles  $\downarrow 2$  et  $\uparrow 2$  représentent respectivement les opérations de sous-échantillonnage ( $s[n] \mapsto s[2n]$ ) et de sur-échantillonnage ( $\tilde{s}[n]$ ).

Nous avons également introduit les coefficients

$$W_j^i(\vec{b}) = W_{j,0,0}^a(\vec{b}), \quad (4.133)$$

associés à l'ondelette isotrope

$$\hat{\psi}^i(\vec{k}) = \rho(k) \varphi_{0,0}(\kappa) = \rho(k). \quad (4.134)$$

Ces coefficients correspondent aussi à la moyenne angulaire des  $R_{\vec{b},j}(\kappa)$  puisque

$$W_j^i(\vec{b}) = \langle 1 | R_{\vec{b},j} \rangle = \langle R_{\vec{b},j} \rangle. \quad (4.135)$$

#### 4.4.5 Sélectivité adaptative $\square$

Dans les sections précédentes, nous avons défini une nouvelle famille d'ondelettes de sélectivité angulaire ajustable réalisant un repère linéaire pour chaque niveau de sélectivité  $l \in \mathbb{N}$ , le cas  $l = 0$  correspondant à un repère complètement isotrope.

Il est cependant possible d'employer un niveau  $l$  variable.

**Proposition 4.13.** *Pour toute fonction*

$$\tilde{l}: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (\vec{x}, j) & \mapsto & \tilde{l}(\vec{x}, j), \end{array} \quad (4.136)$$

la fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  peut être décomposée en

$$f(\vec{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^j]} 2^{-\frac{j}{2}} W_{j,\tilde{l},n}^a(\vec{x}). \quad (4.137)$$

Ceci est une simple conséquence de

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} 2^{-\frac{l}{2}} W_{j,l,n}^a(\vec{x}) = W_j^i(\vec{x}),$$

pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , puisque  $\sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \varphi_{l,n}(\kappa) = 2^{\frac{l}{2}}$ .

Le choix de la fonction  $\tilde{l}$  étant libre, nous pouvons l'adapter au contenu de  $f$ . Fixant un niveau de sélectivité maximal  $L \in \mathbb{N}$ , un choix possible consiste à prendre

$$\tilde{l}(\vec{b}, j) = \arg \max_{l \in [0, L]} \max_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} |\langle \psi_{\vec{b},j,l,n}^a | f \rangle| a_j \|\psi_{l,0}^a\|^{-1}, \quad (4.138)$$

avec  $a_j^{-1} \|\psi_{l,0}^a\| = \|\psi_{\vec{b},j,l,n}^a\|$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$  et tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ .

Autrement dit, en une position  $\vec{x}$  et une échelle  $j$  données, le niveau de sélectivité choisi est celui qui maximise la ressemblance (locale) entre  $f$  et une ondelette de ce niveau.

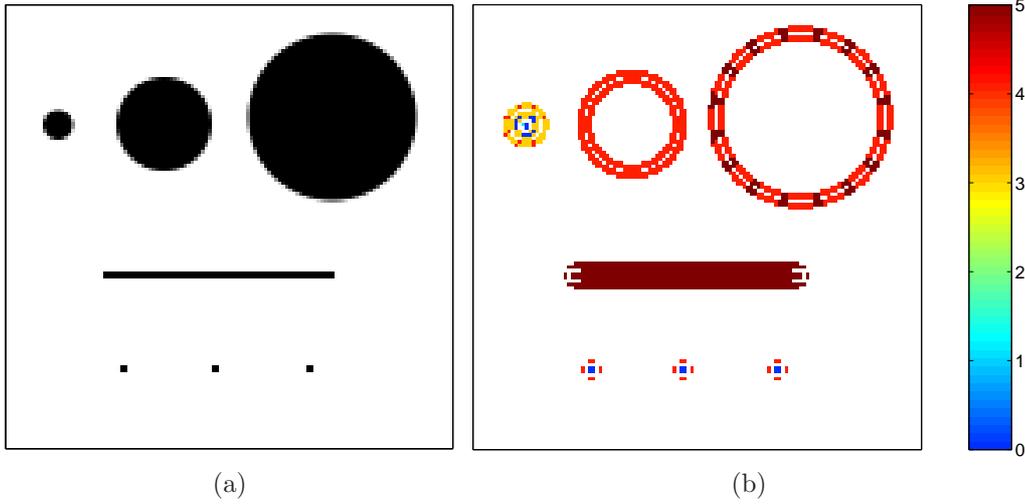


FIG. 4.6 – Valeur de  $\tilde{l}(\vec{x}, 0)$  sur un exemple académique avec  $L = 5$ .

La Figure 4.6(b) présente le résultat du calcul de  $\tilde{l}$  (pour  $j = 0$  et  $L = 5$ ) sur une image académique contenant différentes formes géométriques (Fig. 4.6(a)). Les ondelettes employées dans cet exemple sont présentées à la section suivante.

Les valeurs de  $\tilde{l}$  sont affichées uniquement dans les zones où la reconstruction de  $f$  à l'échelle  $j = 0$ , c.-à-d.  $W_0^i$ , dépasse 10% de sa valeur maximale.

Nous voyons que  $\tilde{l}$  suit d'assez près le caractère "orienté" des objets analysés. Le niveau de sélectivité croît avec le rayon de courbure des trois disques de la Figure 4.6(a) sur les contours de ceux-ci. Les trois singularités de la partie inférieure sont par contre liées à un niveau nul. Finalement, la droite donne un niveau de sélectivité maximal.

#### 4.4.6 Choix de l'ondelette $\square$

Pour choisir les fonctions  $\phi$  et  $\chi$ , mères de leurs versions périodisées  $\Phi$  et  $\chi$ , nous utilisons les résultats de Cohen-Daubechies-Feauveau [CDF92] sur la recherche d'une base d'ondelettes biorthogonales de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  à support compact et avec un nombre de moments nuls donnés (cfr. annexe B). Nous utilisons ici les filtres  $h$  et  $\tilde{h}$  calculés en [CDF92] avec respectivement  $p = 3$  et  $\tilde{p} = 7$  moments nuls. Leurs valeurs sont présentées à l'annexe B sur le tableau B.1.

Cette base est reliée à une fonction d'échelle *B-spline* quadratique (ordre  $p-1$ ) [UAE93] telle que  $\phi(t) = \beta_2(t)$ , où  $\beta_n(t)$  est défini en (B.47). Cette fonction a pour support  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  (Fig. B.1(a)). Lorsque  $l$  est suffisamment grand, ceci garantit que l'ondelette conique  $\hat{\psi}_{l,n}^a(k)$  définie en (4.112) possède une régularité quadratique sur les bords du cône fréquentiel la supportant.

Pour que les ondelettes  $\{\psi_{b,j,l,n}^a\}$  réalisent un repère linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$ , la proposition

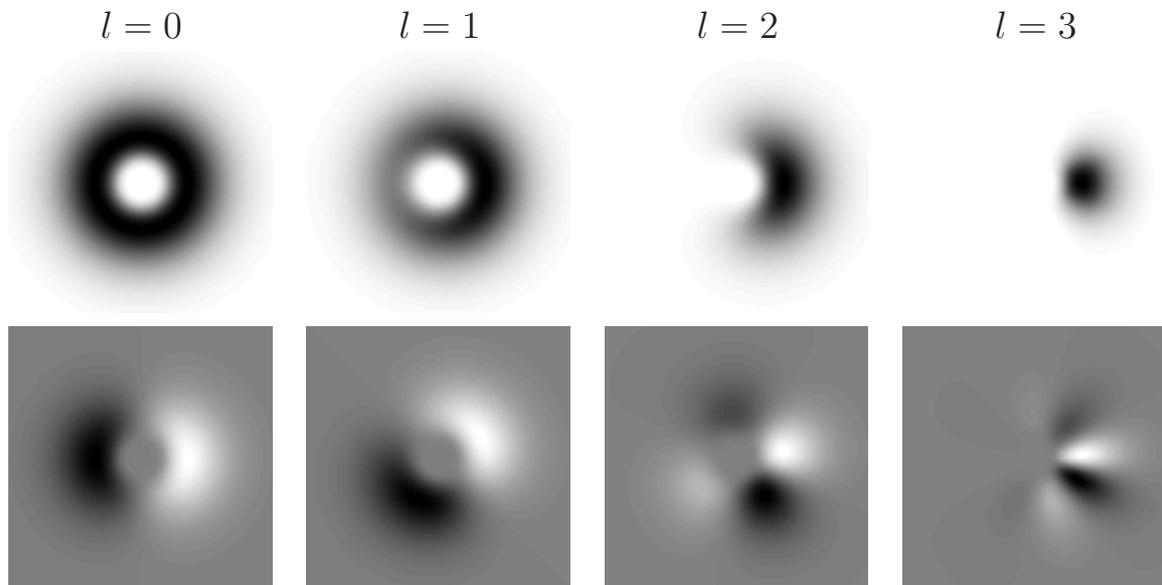


FIG. 4.7 – Présentation des ondelettes  $\hat{\psi}_{l,n}^a(\vec{k})$  et  $\hat{\psi}_{l,n}^d(\vec{k})$  pour différentes valeurs de  $l$ .

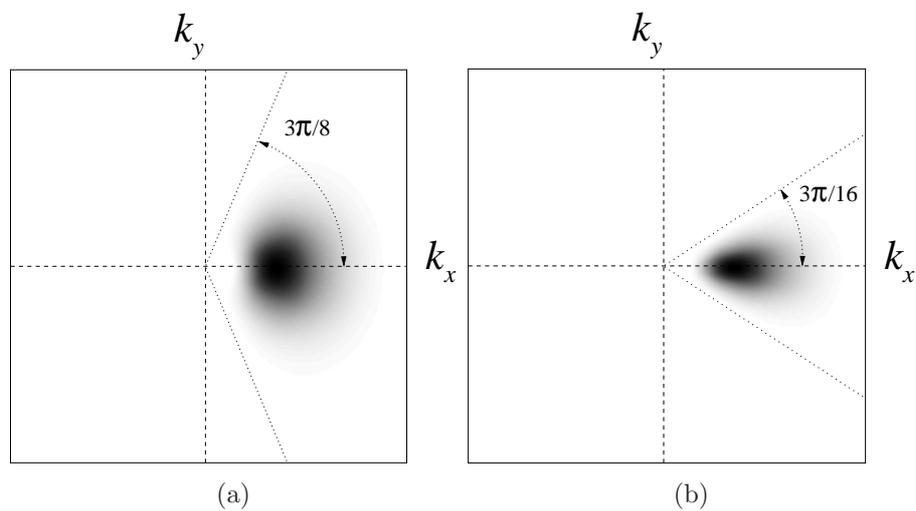


FIG. 4.8 – Comparaison de la sélectivité angulaire de deux ondelettes du repère ASF. (a)  $\hat{\psi}_{3,0}^a(\vec{k})$  ( $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ ). (b)  $\hat{\psi}_{4,0}^a(\vec{k})$  ( $\alpha = \frac{3\pi}{16}$ ).

4.12 exige que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho(a_j k) = 1,$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}_+$ . Cette condition est satisfaite en prenant simplement

$$\rho(k) = \phi(\log_2 k), \quad (4.139)$$

puisque  $a_j = \frac{a_0}{2^j}$  et que  $\phi$  réalise une partition de l'unité (4.96).

La Figure 4.7 présente les ondelettes  $\hat{\psi}_{l,n}^a$  et  $\hat{\psi}_{l,n}^d$  associées aux choix décrit plus haut. Le support de  $\phi$  étant égal à  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ , il est facile de calculer la demi-ouverture angulaire  $\alpha$  du cône supportant les ondelettes  $\hat{\psi}_{l,n}^a$ . Elle suit la règle

$$\alpha = \frac{3\pi}{2^l}, \quad \forall l \geq 1. \quad (4.140)$$

Les ondelettes associées sont donc coniques pour  $l \geq 3$ , valeur pour laquelle le cône devient strictement convexe [AMV99]. Ce phénomène est illustré à la Figure 4.8

Pour chaque  $l \in \mathbb{N}$ , nous nommons le repère linéaire de fonctions  $\{\psi_{j,l,n}^a\}$  ainsi formé *repère spline angulaire* (ASF<sup>14</sup>) à sélectivité fixe.

Lorsque nous employons la quantité  $\tilde{l}(\vec{b}, j)$ , la famille de fonctions  $\{\psi_{j,\tilde{l},n}^a\}$  est appelée repère ASF *adaptatif* (ou à sélectivité adaptative).

#### 4.4.7 Implémentation et discrétisation $\square$

Nous adoptons la même méthode que celle décrite à la section 4.3.2. Puisque  $\text{supp}(\phi) = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ , en prenant  $a_0 = \frac{\sqrt{2^3}}{\pi} \simeq 0.9003$  dans la discrétisation  $a_j = \frac{a_0}{2^j}$ , la fonction  $\rho(a_0 k) = \phi(\log_2 a_0 k)$  est centrée sur la fréquence  $\frac{\pi}{2}$  avec pour support l'intervalle  $[\frac{\pi}{8}, \pi[$ . Par conséquent, les ondelettes  $\psi_{j,l,n}^a$  et  $\psi_{j,l,n}^d$  sont à bande limitée pour  $j \in -\mathbb{N}$ , autrement dit, ces deux fonctions appartiennent à  $\mathcal{B}_\pi$ . En conséquence, la résolution  $j_\psi$  est fixée à 1, et nous pouvons définir la fonction résiduelle associée à  $\psi_{l,n}^a$  par

$$\hat{\eta}_{l,n}(\vec{k}) = \mathbb{1}_{B_\pi}(\vec{k}) \varphi_{l,n}(\kappa) \sum_{j=1}^{\infty} \phi(\log_2 k + \log_2 a_0 - j). \quad (4.141)$$

La fonction d'échelle isotrope est quant à elle établie par

$$\zeta(\vec{k}) = \sum_{j \in -\mathbb{N}} \phi(\log_2 k + \log_2 a_0 - j). \quad (4.142)$$

Avec les particularités de l'analyse multisélective et pour  $J \in \mathbb{N}$  et  $L \in \mathbb{N}$  fixés, la reconstruction (4.63) d'une fonction  $f \in \mathcal{B}_\pi$  devient

$$f(\vec{x}) = S_{-J}(\vec{x}) + \sum_{j=-J+1}^0 \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^{\tilde{l}}]} W_{j,\tilde{l},n}(\vec{x}) + \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^{\tilde{l}}]} H_{\tilde{l},n}(\vec{x}), \quad (4.143)$$

<sup>14</sup>Pour *Angular Spline Frame*.

avec  $S_{-j}$  défini en (4.51), et

$$H_{l,n}(\vec{x}) = \langle \eta_{l,n} | f \rangle, \quad (4.144)$$

pour  $l \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$ .

Pour tenir compte du changement d'ondelettes à haute fréquence, la fonction  $\tilde{l}$  est redéfinie en cette résolution par

$$\tilde{l}(\vec{b}, 1) = \arg \max_{l \in [0, L]} \max_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} |\langle \eta_{\vec{b}, l, n} | f \rangle| \|\eta_{l,n}\|^{-1}, \quad (4.145)$$

avec  $\eta_{\vec{b}, l, n}(\vec{x}) = \frac{1}{a_j^2} \eta_{l,n}(\vec{x} - \vec{b})$ .

Remarquons que la formule de reconstruction associée au repère ASF à sélectivité fixe s'obtient simplement en remplaçant  $\tilde{l}$  par  $L$  dans (4.143).

**Exemple :** Nous présentons sur la Figure 4.9 la décomposition de l'image de la Figure 4.6(a) en ses coefficients  $W_{j,l,n}^a$  pour  $j = 0$  et pour  $l \in [1, 3]$ , avec l'ondelette  $\psi_{l,n}^a$  détaillée plus haut. Comme l'image est réelle,  $\hat{f}^*(\vec{k}) = \hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}(r_\pi \vec{k})$  et  $|W_{j,l,n}^a| = |W_{j,l,n+2^{l-1}}^a|$ , de sorte que seuls les modules des coefficients  $W_{j,l,n}^a$  avec  $n \in [0, 2^{l-1}[$  sont affichés. Lorsque  $l$  augmente, la sélectivité angulaire des ondelettes  $\psi_{j,l,n}^a$  est clairement croissante au vu de la taille décroissante des portions de disques détectées.

*Remarque 4.4.* De par le choix de la fonction radiale  $\rho$ , les fonctions  $\psi_{j,l,n}^{a,d}$  appartiennent en réalité à  $\mathcal{B}_{2^{-j}\pi}$ . Par conséquent, un sous-échantillonnage non destructif des coefficients  $S_{j,l,n}(\vec{b})$  et  $W_{j,l,n}^{a,d}(\vec{b})$  est réalisable à chaque diminution<sup>15</sup>  $j$ . Cette économie n'est cependant pas réalisée ici. Ce point est donc laissé ouvert pour des recherches complémentaires visant à améliorer l'efficacité et l'optimisation des algorithmes employés.

*Remarque 4.5.* Les coefficients  $W_{j,l,n}^{a,d}(\vec{b})$  peuvent être évalués selon deux méthodes. Premièrement, il est possible de les obtenir au moyen de convolutions rapides (employant la FFT) réalisées sur l'image  $f$  avec les filtres  $\psi_{j,l,n}^{a,d}$ . Pour une image  $f$  de taille  $N \times N$ , pour  $j$  fixé, et étant donné un niveau de sélectivité maximal  $L \in \mathbb{N}$ , il faut ainsi  $O((2^{L+1} - 1)N^2 \log^2 N)$  opérations pour calculer les coefficients  $W_{j,l,n}^a(\vec{b})$ .

La deuxième méthode tient compte du schéma pyramidal présenté aux Figures 4.4 et 4.5. Il suffit dans une phase initiale de calculer par convolution spatiale les  $2^L$  images  $W_{j,L,n}^a(\vec{b})$  pour  $n \in \mathbb{Z}[2^L]$ . Ensuite, les niveaux de sélectivité inférieurs s'obtiennent par l'emploi des filtres  $(h_l, g_l)$ , c.-à-d. au moyen de combinaisons linéaires des coefficients aux sélectivités supérieures.

Pour  $j$  et  $l$  fixés, et en supposant le filtre  $h$  de longueur  $K$ , le calcul des  $2^l$  images  $W_{j,l,n}^a(\vec{b})$  sur base de la connaissance des  $W_{j,l+1,n}^a(\vec{b})$  nécessite  $O(2^l \min(K, 2^l)N^2)$  opérations, puisque

---

<sup>15</sup>De plus, par une méthode équivalente à celle développée en [KS96] dans le contexte des filtres orientables (*steerable filters*), un codage en *sous-bande* peut être réalisé en déduisant les coefficients  $W_{j,l,n}^{a,d}$  des approximations  $S_{j,l,n}(\vec{b})$  par un filtrage haute-fréquence adapté.

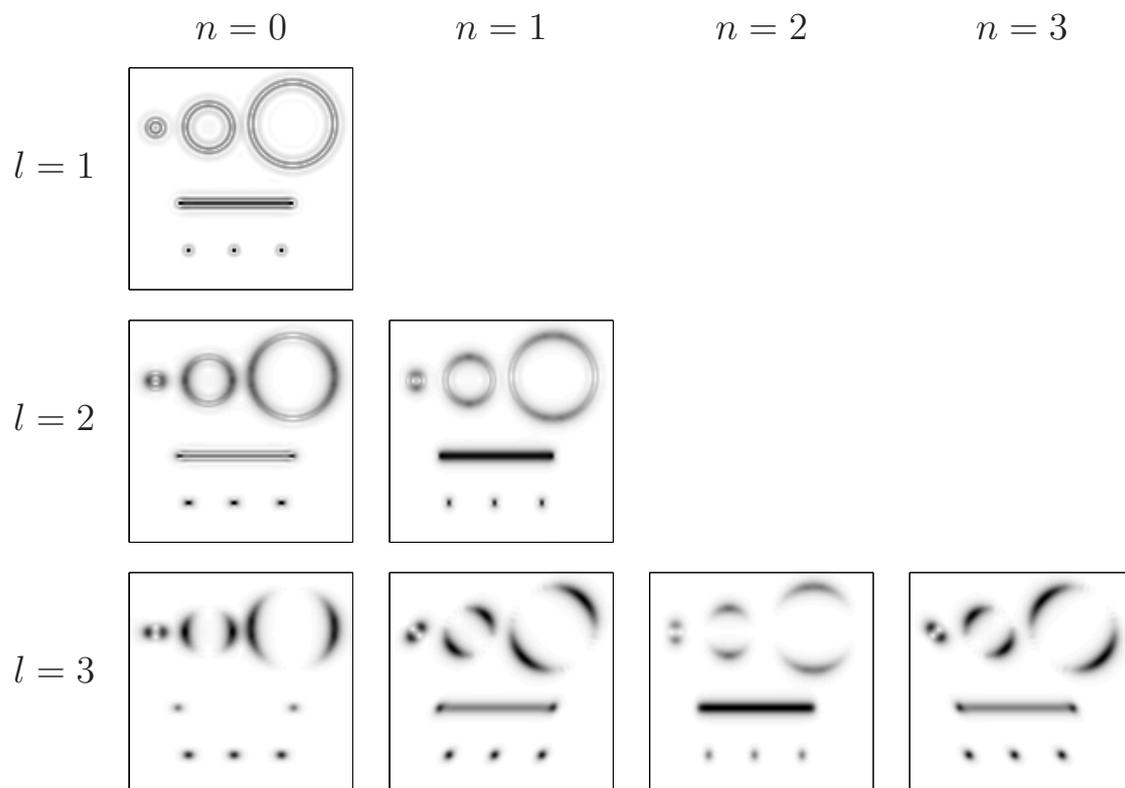


FIG. 4.9 – Décomposition d'une image académique en ses coefficients en ondelettes à différents niveaux de sélectivité.

$\text{supp}(h_l) = \min(2^l, K)$ . Au total,

$$O(N^2(2^L \log^2 N + \sum_{l=1}^L 2^{L-l} \min(2^{L-l}, K))) \leq O(N^2(2^L \log^2 N + K2^L - K)) \quad (4.146)$$

opérations sont donc nécessaires pour évaluer les  $2^{L+1}$  images  $W_{j,l,n}^a(\vec{b})$  (avec  $l \in [0, L]$ ,  $n \in \mathbb{Z}[2^l]$ ).

Le nombre d'opérations requis pour évaluer les coefficients  $W_{j,l,n}^a(\vec{b})$  dans les deux méthodes est donc grossièrement équivalent. Toutefois, si les constantes multiplicatives intervenant dans l'évaluation des nombres  $O(\cdot)$  ci-dessus ne sont pas trop importantes, la seconde méthode est plus intéressante pour les filtres  $h$  courts. En effet, pour  $K \leq \log^2 N$ ,

$$2^L \log^2 N + K2^L - K \leq (2^{L+1} - 1) \log^2 N \quad (4.147)$$

#### 4.4.8 Approximation non-linéaire $\square$

Pour un repère d'ondelettes  $\Psi = \{\psi_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ , où  $\lambda$  représente l'ensemble des indices d'une ondelette, nous définissons l'approximation non-linéaire à  $N \in \mathbb{N}$  termes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  dans ce repère par

$$f_N = \sum_{k=1}^N \langle \psi_{\lambda_k} | f \rangle \tilde{\psi}_{\lambda_k}, \quad (4.148)$$

où  $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$  est le repère dual de  $\Psi$ , et où  $\lambda_k$  est un réarrangement des coefficients  $\langle \psi_\lambda | f \rangle$  tel que

$$m_{\lambda_k} = \|\psi_{\lambda_k}\|^{-1} |\langle \psi_{\lambda_k} | f \rangle| \geq m_{\lambda_{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.149)$$

Le coefficient  $m_\lambda$  est nommé *magnitude* du coefficient  $\langle \psi_\lambda | f \rangle$ .

L'erreur d'approximation réalisée entre  $f$  et  $f_N$  est définie par

$$\epsilon_f[N] = \|f - f_N\|^2. \quad (4.150)$$

A l'inverse des bases orthogonales [Mal98], il n'est pas possible ici d'affirmer que l'approximation  $f_N$  utilisant les  $N$  plus grands termes (au sens des magnitudes) de la décomposition de  $f$  est la meilleure approximation à  $N$  termes de cette fonction, c.-à-d. celle minimisant l'erreur quadratique  $\epsilon_f[N]$ . Toutefois, nous conjecturons ici que cette erreur décroît globalement pour  $N$  croissant.

Dans le cas d'un repère semi-continu sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , le repère d'ondelettes est la famille de fonction  $\{\psi_{\vec{b},\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ , où  $\lambda$  est maintenant un multi-indice discret associé aux possibles dilatations, rotations et changements de sélectivité. Bien que le paramètre de position  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  soit continu dans le cas théorique, la discrétisation décrite en 4.3.2 permet encore de "compter" les  $N$  premiers termes de la décomposition de  $f \in \mathcal{B}_\pi$ .

En outre, puisque le nombre total  $M$  de coefficients est limité (par exemple en fixant  $J$  et  $L$  pour les repères ASF), nous pouvons comparer des repères différents en observant la

qualité des approximations non-linéaires obtenues en retenant  $\tau\%$  des meilleurs coefficients, c.-à-d. pour  $N = \lfloor M \frac{\tau}{100} \rfloor$  termes.

Nous allons maintenant comparer dans quelques exemples, les approximations non-linéaires obtenues à pourcentage  $\tau$  égal dans trois repères directionnels (semi-continus) : un repère CMW (Sec. 4.3.3), un repère ASF à sélectivité fixe, et un repère ASF adaptatif.

$L$	$N$	1% des coefficients.		10% des coefficients.	
		ASF fixe	ASF adapt.	ASF fixe	ASF adapt.
0	1	13.83dB	13.83dB	19.15dB	19.15dB
1	2	13.83dB	14.09dB	19.19dB	20.10dB
2	4	13.79dB	14.07dB	19.19dB	20.04dB
3	8	13.80dB	14.34dB	20.18dB	21.44dB
4	16	14.24dB	15.00dB	19.99dB	22.37dB

TAB. 4.3 – Approximation non-linéaire d'une image académique pour les repères ASF fixe et adaptatif. Les résultats sont les PSNR des images reconstruites relativement à l'image originale en utilisant 1% et 10% des meilleurs coefficients en terme de magnitude.

**Exemple académique :** Reprenons l'image académique de taille  $128 \times 128$  présentée à la Figure 4.6(a).

Le tableau 4.3 présente la qualité des reconstructions obtenues (en PSNR) à l'aide des repères ASF fixe et adaptatif, pour  $J = 4$  échelles et différentes valeurs de  $L$ , en prenant 1% et 10% des meilleurs coefficients<sup>16</sup> intervenant dans la décomposition (4.143).

Quel que soit le pourcentage de coefficients conservés, la qualité de la reconstruction augmente clairement dans le cas adaptatif en fonction du nombre d'orientations  $2^L$  disponibles. Cette qualité est nettement moins améliorée pour  $L$  croissant dans le cas d'une sélectivité fixe. La qualité de la reconstruction réalisée pour  $L = 4$  dans le cas adaptatif surpasse en outre la qualité des reconstructions obtenues dans le cas fixe pour l'ensemble des  $l \in [0, 4]$ .

La Figure 4.10 affiche les approximations obtenues pour la dernière ligne du tableau 4.3. A pourcentage égal, le cas adaptatif présente plus de détails que le schéma à sélectivité fixe. De manière générale, ce premier affiche les objets plus isotropes de l'image oubliés par la seconde méthode.

**Exemple réel :** Nous avons choisi une photographie d'un champ de tournesol (Figure 4.11). Celle-ci présente à la fois des détails directionnels, comme les tiges des plantes et les

<sup>16</sup>Notons par exemple que 1% des coefficients pour les repères ASF fixe et adaptatif représentent respectivement 13 105 et 11 925 valeurs.

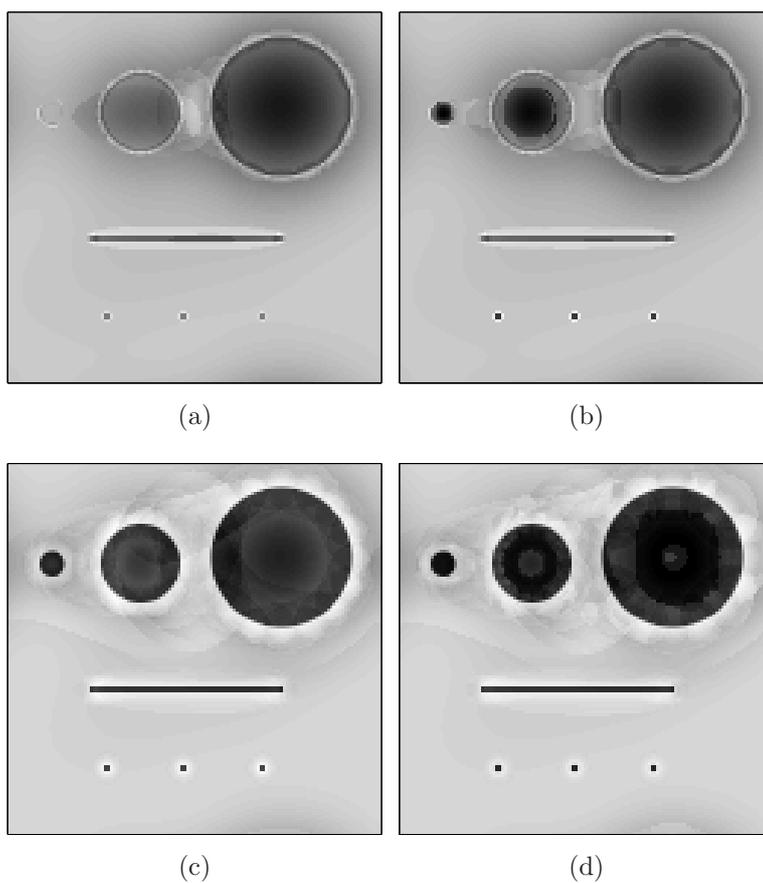


FIG. 4.10 – Approximation non-linéaire d'une image académique à 1% et 10% des meilleurs coefficients pour  $L = 4$  et  $J = 4$ . (a) ASF fixe à 1%. (b) ASF adaptatif à 1%. (c) ASF fixe à 10%. (d) ASF adaptatif à 10%.

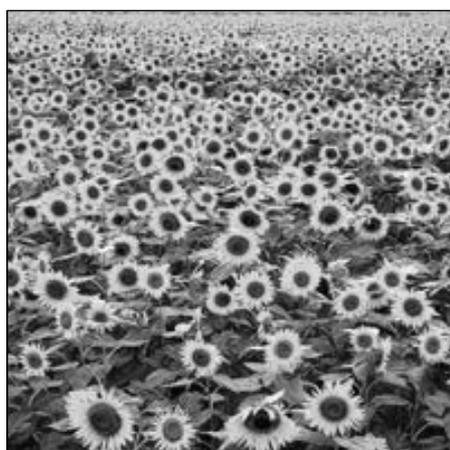


FIG. 4.11 – Photographie d'un champ de tournesols.

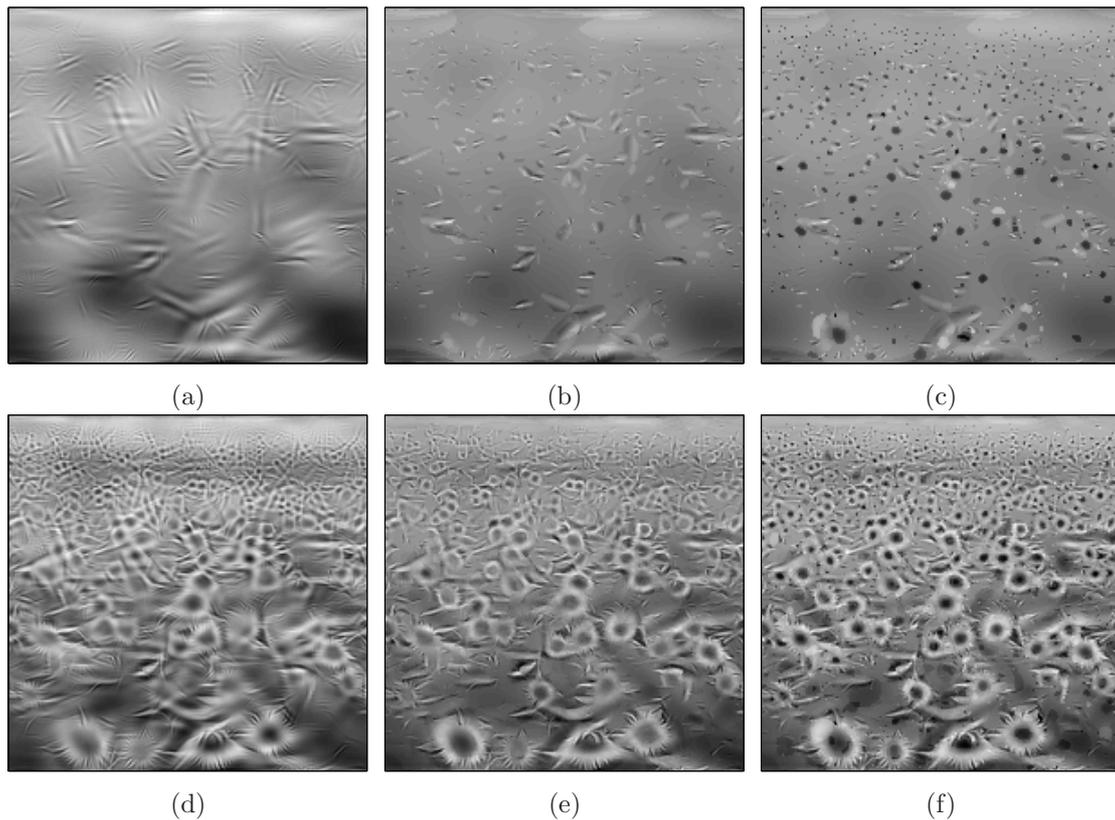


FIG. 4.12 – Approximations non-linéaires d'une photographie d'un champ de tournesols. Les Figures (a), (b) et (c) présentent les approximations non-linéaires réalisées avec 1% des meilleurs coefficients respectivement pour les repères CMW (PSNR=14.03 dB), ASF fixe (PSNR=13.84 dB) et ASF adaptatif (PSNR=14.27 dB). Les Figures (d), (e) et (f) sont équivalentes aux Figures (a), (b) et (c) mais avec 10% des coefficients. Les qualités des reconstructions obtenues sont respectivement égales à 17.02 dB, 16.72 dB et 18.22 dB.

contours des feuilles, ainsi que des zones plus isotropes tel le coeur sombre des fleurs. En outre, l'angle de prise de vue est tel que ces objets apparaissent à des échelles différentes en fonction de leur distance à l'objectif supposé. Différentes approximations non-linéaires à 1% et 10% des meilleurs coefficients ont été calculées pour  $J = 4$  résolutions,  $N = 2^L = 16$  orientations, et avec les repères CMW, ASF fixe et ASF adaptatif. Quel que soit le pourcentage de coefficients conservés, le schéma multisélectif donne des qualités de reconstruction plus importantes. Les détails isotropes y sont également nettement moins défavorisés que dans les repères à sélectivité angulaire constante. A 1%, le repère ASF adaptatif rend déjà compte de la majorité des coeurs sombres de fleurs, alors que ces derniers n'apparaissent pas dans les autres approximations.

#### 4.4.9 Conclusions et perspectives

Un repère semi-continu (linéaire) de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  composé d'ondelettes directionnelles a été décrit. Ces dernières sont construites directement en fréquence sur base de fonctions d'échelles et d'ondelettes issues d'une analyse multirésolution circulaire. Cette méthode confère à ces ondelettes bidimensionnelles la capacité de se combiner dans des *relations d'échelle angulaire*. De nouvelles ondelettes de plus faible sélectivité angulaire peuvent alors être engendrées, jusqu'à l'obtention d'une ondelette totalement isotrope. En outre, puisqu'à chaque *niveau de sélectivité*, les ondelettes générées maintiennent la réalisation d'un repère linéaire du plan, le niveau de sélectivité est ajusté au contenu de l'image analysée.

Grâce à cette capacité d'adaptation, et en comparaison avec des méthodes à sélectivité angulaire fixe (repère CMW et repère ASF fixe), le schéma multisélectif obtient des reconstructions non-linéaires de bonne qualité à  $\tau\%$  des meilleurs termes de la décomposition.

Ce résultat nous montre qu'un repère multisélectif à sélectivité adaptative économise le nombre de coefficients en fonction du caractère orienté ou non des points de l'image analysée. Intuitivement, si au niveau  $l$  de sélectivité,  $2^l$  coefficients sont nécessaires pour rendre compte d'un détail mieux caractérisé au niveau  $l-1$ , le schéma multisélectif adaptatif permet de gagner  $2^{l-1}$  coefficients dans une approximation non linéaire limitée à un nombre restreint de coefficients.

Ce phénomène a été utilisé implicitement dans le cadre du débruitage d'image [AJ03a]. Au vu des résultats obtenus dans cet article, les ondelettes les plus isotropes semblent cependant inaptes à décorréler facilement les composantes du bruit de celle de l'image d'intérêt. Une étude plus systématique en ce sens reste à réaliser.

La question de l'intérêt éventuel des fonctions  $\psi_{j,l,n}^d$  dans une représentation adaptée d'images mérite également d'être posée. Ces dernières présentent, par exemple, des similarités frappantes avec les ondelettes *endstopped* (Sec. 2.3.4). Pour rappel, celles-ci miment l'action de certaines cellules de la rétine dans la vision à bas niveau. Or, dans le cas du repère ASF, l'ondelette  $\chi$  employée est semblable à une dérivation de l'ondelette spline  $\phi$  (Fig. B.1). Une ondelette  $\hat{\psi}_{j,l,0}^d(\vec{k})$  est donc fort proche de la dérivation en  $k_y$  d'une ondelette  $\hat{\psi}_{j,l,0}^a(\vec{k})$  orientée selon  $k_x$ , ce qui suit le procédé créant une ondelette *endstopped* du

*premier type* à partir d'une ondelette de Morlet.

Pour terminer, existe-t-il un schéma multisélectif applicable aux repères semi-continus non-linéaires d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  ?

Par l'emploi d'une convolution des coefficients en ondelettes lors de la phase de reconstruction d'une image (Sec. 4.3.1), les repères non-linéaires régularisent les opérations discontinues, tels les seuillages, réalisées sur ces coefficients.

Cependant, si à chaque niveau de sélectivité  $l \in \mathbb{N}$  un repère multisélectif  $\{\psi_{\vec{b},j,l,n} : \vec{b} \in \mathbb{R}^2, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}[2^l]\}$  existe, la proposition 4.7 impose que la reconstruction d'une fonction  $f$  se réalise au moyen d'ondelettes duales  $\tilde{\psi}_{\vec{b},j,l,n}$  telles que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \hat{\psi}_{j,l,n}(\vec{k}) \hat{\tilde{\psi}}_{j,l,n}(\vec{k}) = 1, \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.151)$$

où  $\psi_{j,l,n} = \psi_{\vec{0},j,l,n}$  et  $\tilde{\psi}_{j,l,n} = \tilde{\psi}_{\vec{0},j,l,n}$ .

La question est alors de déterminer si nous pouvons construire des ondelettes directes et duales vérifiant certaines formules de récurrence entre les différents niveaux  $l$ , et si, en outre, ces niveaux sont adaptables au contenu de  $f$  au sein d'une même formule de reconstruction.

## 4.5 Repères d'ondelettes stéréographiques sur $L^2(S^2)$ $\square$

### 4.5.1 Introduction

La section 2.4 a introduit la transformée continue en ondelettes sur la sphère  $S^2$  (SCWT [AV99]). Nous proposons à présent d'étudier sous quels critères cette transformée peut être discrétisée tout en maintenant une reconstruction de la fonction analysée. Autrement dit, nous allons construire des repères d'ondelettes (stéréographiques) sur  $S^2$ . Nous n'étudions cependant que le cas des ondelettes axisymétriques (zonales).

Avant de poursuivre, notons que des approches équivalentes existent en ce domaine. Citons par exemple la méthode *Lifting-Scheme* de P. Schröder et W. Sweldens [SS95] réalisant une analyse multirésolution à partir d'une paramétrisation icosaédrique de  $S^2$ .

W. Freeden [FMZ03] définit également une transformée sur  $S^2$  en se basant sur une dilatation différente réalisée directement en Fourier. Des repères polynomiaux sphériques ont aussi été créés en [MNP00], l'ordre des polynômes définissant la résolution de l'analyse. Le désavantage de ces méthodes est cependant de privilégier l'aspect fréquentiel des transformées. La localité spatiale des filtres ainsi définis n'est par exemple pas garantie et la dilatation n'a aucun fondement géométrique en position.

En se restreignant à une fonction particulière, T. Bülow parvient cependant à retrouver cette localité en employant une gaussienne sphérique issue de l'équation de la chaleur sur  $S^2$  [Bül02]. Il obtient ensuite plusieurs filtres reliés aux dérivées de cette gaussienne.

Ce dernier cadre n'est malheureusement pas aussi général que celui d'une dilatation stéréographique appliquée à n'importe quelle ondelette admissible sur  $S^2$ .

4.5.2 Repère sphérique semi-continu  $\square$ 

## Rappels

Nous avons introduit dans la section 2.3 la transformée en ondelettes continue sur la sphère  $S^2$ . Pour rappel, étant donné une fonction  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et une ondelette  $\psi$  axisymétrique vérifiant la condition d'admissibilité (2.66), la SCWT de  $f$  est définie par

$$W_f(\omega, a) = \int_{S^2} d\mu(\omega') f(\omega') [R_{[\omega]} D_a \psi]^*(\omega'),$$

avec  $\omega = (\theta, \varphi) \in S^2$ ,  $[\omega] = \rho(\varphi, \theta, 0) \in SO(3)$  en notation Eulerienne, et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .  $R_\rho$  est l'opérateur de rotation sur  $L^2(S^2)$ , et  $D_a$  est la dilatation stéréographique telle que

$$(D_a f)(\omega) = \lambda(a, \theta)^{\frac{1}{2}} f(\omega_{\frac{1}{a}}),$$

pour  $f \in L^2(S^2)$ , et avec le cocycle

$$\lambda(a, \theta) = \frac{4a^2}{[(a^2 - 1) \cos(\theta) + (a^2 + 1)]^2}.$$

Le corollaire 2.3 donne en outre la formule de reconstruction suivante pour le cas d'une ondelette axisymétrique :

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{S^2} \frac{dad\mu(\omega')}{a^3} W_f(\omega', a) \tilde{\psi}_{\omega, a}(\omega'),$$

avec  $\tilde{\psi}_{\omega, a} = R_{[\omega]} L_\psi^{-1} D_a \psi$ , et  $L_\psi$  l'opérateur de repère tel que

$$[\widehat{L_\psi^{-1} \psi_a}](l, m) = G_\psi(l)^{-1} \hat{\psi}_a(l, 0) \delta_{0, m} = \left[ \frac{4\pi}{2l+1} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{da}{a^3} |\hat{\psi}_a(l, 0)|^2 \right]^{-1} \hat{\psi}_a(l, 0) \delta_{0, m}. \quad (4.152)$$

## Première approche

Nous proposons maintenant de discrétiser les échelles de la SCWT tout en laissant varier les positions continûment. Autrement dit, nous choisissons

$$\omega \in S^2 \quad (4.153)$$

$$a \in \alpha = \{a_j \in \mathbb{R}_+^* : a_j > a_{j+1}, j \in \mathbb{Z}\} \quad (4.154)$$

donnant lieu à la grille semi-continue

$$\Lambda(\alpha) = \{(\omega, a_j) : \omega \in S^2, j \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.155)$$

Pour simplifier les notations, nous remplacerons par la suite les indices  $a_j$  par  $j$ ,  $\psi_{a_j}$  devenant par exemple  $\psi_j$ , tandis que  $W_j(\omega) = W_f(\omega, a_j)$ .

Dans une première approche, et en cohérence avec la théorie des repères semi-continus pondérés décrite à la section 4.1.5, la reconstruction de toute fonction  $f \in L^2(S^2)$  est garantie si

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \int_{S^2} d\mu(\omega) |W_j(\omega)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (4.156)$$

avec  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  indépendants de  $f$ , et pour certains poids  $\nu_j > 0$  rendant compte de la discrétisation de la mesure continue  $\frac{d\alpha}{a^3}$ . Dans ce cas, la famille

$$\{\psi_{\omega,j} = R_{[\omega]} D_j \psi : (\omega, a_j) \in \Lambda(\alpha)\}, \quad (4.157)$$

constitue un repère semi-continu de  $L^2(S^2)$ .

La proposition suivante traduit cette dernière condition dans l'espace de Fourier.

**Proposition 4.14.** *S'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que*

$$A \leq \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2 \leq B, \quad (4.158)$$

pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , alors (4.156) est vérifiée.

La démonstration assez immédiate de cette proposition figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 177).

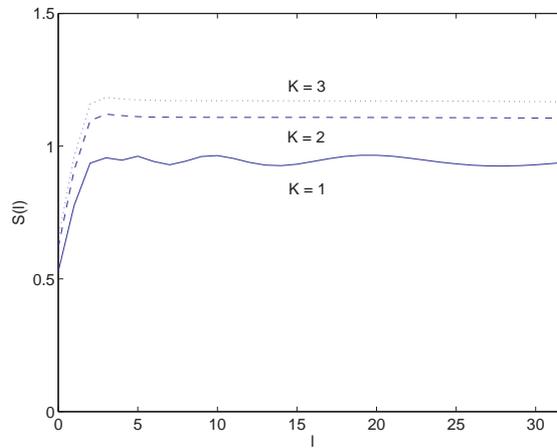


FIG. 4.13 – Analyse d'un repère sphérique semi-continu. Comportement de  $S(l)$  pour plusieurs valeurs de  $K$ .

Choisissons par exemple l'ondelette DOG ( $\alpha = 1.25$ ) avec une discrétisation en échelle dyadique à  $K \in \mathbb{N}^0$  voix, c.-à-d.

$$a_j = a_0 2^{-\frac{j}{K}} \quad (4.159)$$

avec  $j \in \mathbb{Z}$ .

Prenons également des poids  $\nu_j$  qui tiennent compte de la discrétisation de la mesure continue  $\frac{da}{a^3}$ , c.-à-d.

$$\nu_j = \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j^3} = \frac{2^{\frac{1}{K}} - 1}{2^{\frac{1}{K}} a_j^2}. \quad (4.160)$$

La Figure 4.13 (en trait continu) représente le calcul de la quantité

$$S(l) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2, \quad (4.161)$$

pour  $a_0 = 1$  et pour  $K = 1, 2$  et  $3$ .

Pour  $l \leq 3$  et quel que soit le nombre de voix, un “trou” apparaît dans ce graphique. Il s’agit d’une manifestation de l’opérateur de repère continu  $L_\psi$ , lequel n’est pas un multiple de l’identité. L’origine de ce phénomène est aussi intrinsèquement liée à la dilatation stéréographique.

A une voix et pour  $l > 3$ ,  $S(l)$  oscille légèrement avec une amplitude maximale de 0.0219 autour d’une valeur moyenne égale à 0.9438. Ces oscillations diminuent cependant pour les mêmes valeurs de  $l$  si le nombre de *voix* augmente (traits discontinus sur la Figure 4.13).

Intuitivement, pour de petites échelles, la dilatation stéréographique tend vers la *limite Euclidienne* [AV99] exprimée en (2.89) et (2.97). Dès lors, la sphère s’approche par son plan tangent au pôle nord, et  $S(l)$  présente à haute fréquence un comportement analogue à celui obtenu pour des repères de la droite ou du plan [Dau92, Mal98].

Nous avons estimé les bornes  $A$  et  $B$  sur base respectivement du minimum et du maximum de  $S(l)$  sur  $l \in [0, 31]$  et pour  $K \in [1, 4]$ . Le résultat de ces estimations figure sur le tableau 4.4. Pour  $K > 2$ , le rapport  $B/A$  converge vers la valeur 1.8107. Il n’y a donc apparemment pas de convergence vers un repère strict pour lequel  $B/A = 1$ .

$K$	$A$	$B$	$B/A$
1	0.5281	0.9658	1.8288
2	0.6817	1.1203	1.8107
3	0.6537	1.1836	1.8107
4	0.6722	1.2171	1.8107

TAB. 4.4 – Estimation des bornes  $A$  et  $B$  en fonction des extrema de  $S(l)$  pour plusieurs valeurs de  $K$ .

## Seconde approche

Pour cette seconde approche, nous décidons de partir de la relation de Plancherel du corollaire 2.2. Autrement dit, en se basant sur le contenu de la section 4.1.5, nous allons

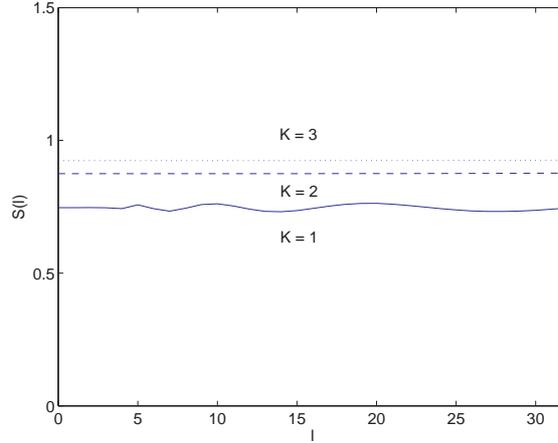


FIG. 4.14 – Analyse d'un repère sphérique semi-continu contrôlé. Comportement de  $S(l)$  pour plusieurs valeurs de  $K$ .

observer sous quelles exigences la condition de repère *contrôlé* suivante est satisfaite. Pour  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ , nous voulons donc

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \int_{S^2} d\mu(\omega) W_j(\omega) \tilde{W}_j^*(\omega) \leq B\|f\|^2, \quad (4.162)$$

avec  $f \in L^2(S^2)$  quelconque, et  $\tilde{W}_j(\omega) = \langle R_{[\omega]} L_\psi^{-1} D_j \psi | f \rangle$ . L'opérateur de contrôle du repère est  $L_\psi^{-1}$  et (2.79) montre que celui-ci est dans  $GL(\mathfrak{H})$  si l'ondelette  $\psi$  est admissible.

**Proposition 4.15.** *S'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que*

$$A \leq \frac{4\pi}{2l+1} G_\psi(l)^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2 \leq B, \quad (4.163)$$

avec  $G_\psi(l)$  donné par (4.152) et pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , alors (4.162) est vérifiée.

La démonstration assez immédiate de cette proposition figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 178).

Reprenant la discrétisation en échelles (4.159) avec l'ondelette DOG ( $\alpha = 1.25$ ), la nouvelle quantité

$$S(l) = \frac{4\pi}{2l+1} G_\psi(l)^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2. \quad (4.164)$$

a été évaluée. Remarquons que, pour  $a_j = a_0 2^{-\frac{j}{K}}$ ,

$$G_\psi(l) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2, \quad (4.165)$$

vu que les poids  $\nu_j$  discrétisent la mesure continue  $\frac{da}{a^3}$ .

Par conséquent, une estimation de  $G_\psi(l)$  est fournie en prenant  $K$  grand dans l'équation précédente. Nous prendrons typiquement  $K = 10$ .

La Figure 4.14 présente la comportement de  $S(l)$  pour  $K = 1, 2$  et  $3$ . Le "trou" de l'approche précédente a complètement disparu. Les oscillations présentes à une voix, sont presque inexistantes pour  $K \geq 2$ . Le tableau 4.5 le confirme et montre que pour  $K$  croissant, le repère tend vers un repère strict. Le repère semi-continu contrôlé par  $L_\psi^{-1}$  est donc dans ce cas meilleur que le repère classique de la première approche. Nous rejoignons ainsi la remarque faite à la fin de la section 4.1.5.

$K$	$A$	$B$	$B/A$
1	0.7313	0.7628	1.0431
2	0.8747	0.8766	1.0021
3	0.9242	0.9254	1.0014
4	0.9503	0.9512	1.0009

TAB. 4.5 – Estimation des bornes  $A$  et  $B$  en fonction des extrema de  $S(l)$  pour plusieurs valeurs de  $K$ .

### Reconstruction

Sur base des considérations précédentes, la reconstruction d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  à l'aide de ses coefficients  $W_j(\omega)$  est réalisable en définissant une ondelette duale dans le formalisme de la première approche donné en (4.156).

**Proposition 4.16.** *Soit une séquence d'échelles  $\alpha = \{a_j : j \in \mathbb{Z}, a_j > a_{j+1}\}$ . Si  $\psi$  est une ondelette axisymétrique telle que, pour deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ ,*

$$A \leq g_\psi(l) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2 \leq B, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad (4.166)$$

auquel cas l'ondelette  $\psi$  et la séquence d'échelles  $\alpha$  sont dites compatibles, alors

$$f(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j [\psi_j^* \star W_j](\omega), \quad (4.167)$$

avec  $\psi_j = l_\psi^{-1} \psi_j$ , et où  $l_\psi$  est un opérateur de repère discrétisé défini en Fourier par

$$\widehat{[l_\psi^{-1} h]}(l, m) = g_\psi^{-1}(l) h(l, m). \quad (4.168)$$

La démonstration est en tout point semblable à celle de la proposition 4.15 (Sec. A.4, p. 178) en y remplaçant  $G_\psi$  par  $g_\psi$ . L'équation (4.167) possède deux interprétations. D'une part, elle rend compte de l'existence d'une ondelette duale  $\psi_j$  permettant la reconstruction de toute fonction de  $L^2(S^2)$  si la condition (4.158) est respectée. D'autre part, elle présente

la famille  $\{\psi_{\omega,j}\}$  comme un repère strict relativement au contrôle de l'opérateur  $l_\psi^{-1}$ , puisque (4.167) équivaut à

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j l_\psi^{-1} [\psi_j^* \star W_j]. \quad (4.169)$$

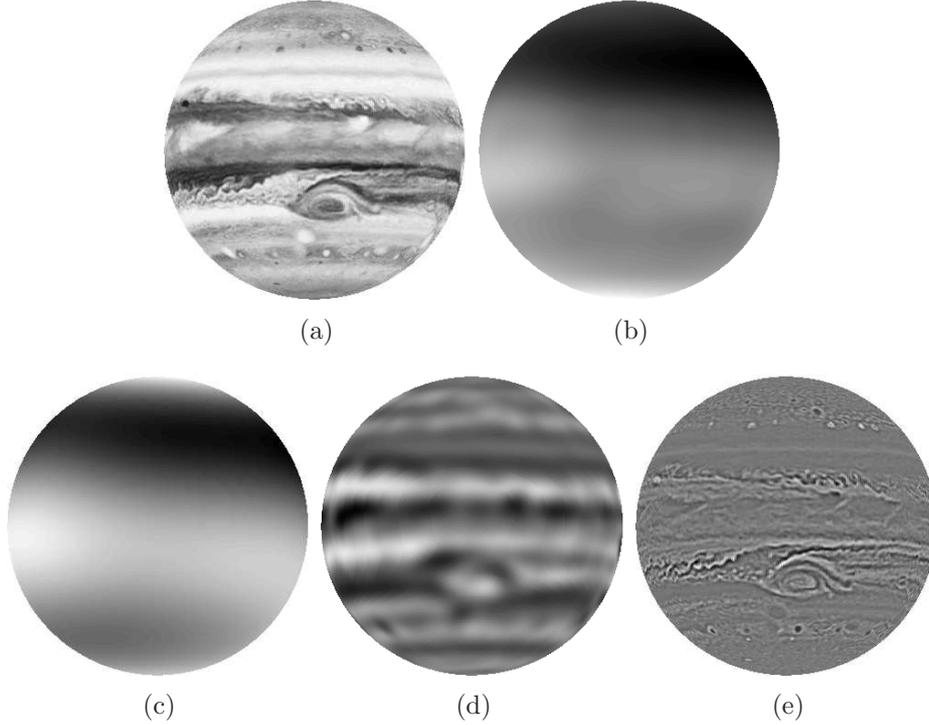


FIG. 4.15 – Décomposition de l'image de Jupiter. (a) Image originale. (b) Approximation basse fréquence  $S$ . (c)  $W_1(\omega)$ . (d)  $W_4(\omega)$ . (e)  $H(\omega)$ .

La section 2.4.6 nous avait montré qu'il existe un  $\tilde{a} \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour  $a \in [\tilde{a}, +\infty[$  croissant, le support fréquentiel de l'ondelette  $\psi_a$  cesse de se contracter pour se redéployer sur les hautes fréquences. Nous proposons donc de compacter toutes les ondelettes présentant ce comportement en une seule fonction

$$|\hat{\zeta}(l, m)|^2 = \delta_{m,0} \sum_{j=-\infty}^{-1} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2. \quad (4.170)$$

Cependant, les poids  $\nu_j$  devenant particulièrement faibles pour les  $a_j$  importants (ils décroissent comme  $a_j^{-2}$ ), cette fonction est principalement localisée sur les basses fréquences. Son rôle peut donc être perçu comme celui d'une fonction d'échelle.

Si la fonction  $f$  est à bande limitée, c.-à-d. si  $f \in \mathcal{B}_\beta$  pour une certaine largeur de bande  $\beta \in \mathbb{N}^0$  (Sec. 1.3.3), il peut être intéressant de définir une fonction résiduelle  $\eta$  de la

manière suivante

$$|\hat{\eta}(l, m)|^2 = \mathbb{1}_{[0, \beta[}(l) \delta_{m,0} \sum_{j=J+1}^{\infty} \nu_j |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2, \quad (4.171)$$

où  $J$  est la résolution maximale telle que le support de  $\hat{\psi}_j(l, 0)$  est inclus (numériquement) à  $[0, \beta[$ .

A l'aide de ces deux nouvelles fonctions, la formule de reconstruction (4.167) se réécrit

$$f(\omega) = [\zeta^* \star S](\omega) + \sum_{j=0}^J \nu_j [\psi_j^* \star W_j](\omega) + [\eta^* \star H](\omega), \quad (4.172)$$

avec  $S(\omega) = \langle R_{[\omega]} \zeta | f \rangle$ ,  $\zeta = l_\psi^{-1} \zeta$ ,  $H(\omega) = \langle R_{[\omega]} \eta | f \rangle$  et  $\eta = l_\psi^{-1} \eta$

### Illustration Jovienne

Nous présentons à la Figure 4.15 le résultat de la décomposition d'une cartographie de la "surface" de Jupiter avec sa *tache rouge* (Fig. 4.15(a)). La grille équi-angulaire associée est de taille  $512 \times 512$  et la bande passante des données a été volontairement tronquée à  $l \in [0, 255]$ . En fonction de cet intervalle, il a été établi que l'ondelette DOG est correctement échantillonnée sur la gamme des  $j$  allant de  $-6$  à  $+6$  pour  $a_0 = 1$ .

La Figure 4.15(b) correspond à la partie basses fréquences  $S(\omega)$ . Les trois Figures 4.15(c), 4.15(d), et 4.15(e) affichent respectivement  $W_1(\omega)$ ,  $W_4(\omega)$ , et la partie résiduelle  $H(\omega)$  obtenue pour  $J = 6$ .

Afin d'illustrer les capacités du repère sphérique semi-continu développé plus haut, nous décidons d'effectuer une petite transformation des données irréalisable en abordant une décomposition sphérique purement fréquentielle : l'augmentation des détails visuels localement au voisinage de la tache rouge de Jupiter.

Pour ce faire, avant de reconstruire l'image sur base de (4.172), les coefficients à l'échelle la plus fine, c.-à-d.  $W_6(\omega)$ , ainsi que ceux de la fonction résiduelle  $H(\omega)$ , sont multipliés par un masque

$$M(\omega) = 1 + n_{a'} [R_{[\omega']} D_{a'} G](\omega), \quad (4.173)$$

où :

- $G(\omega) = \exp(-\tan^2 \frac{\theta}{2})$ , une gaussienne sur  $S^2$ ,
- $\omega'$  le centre approximatif de la tache rouge,
- $a' \in \mathbb{R}_+^*$ , le paramètre d'une certaine dilatation appliquée à  $G$  pour qu'elle couvre la totalité de la tache,
- et  $n_{a'}$  un facteur de normalisation garantissant que  $\|M\|_\infty = 2$ .

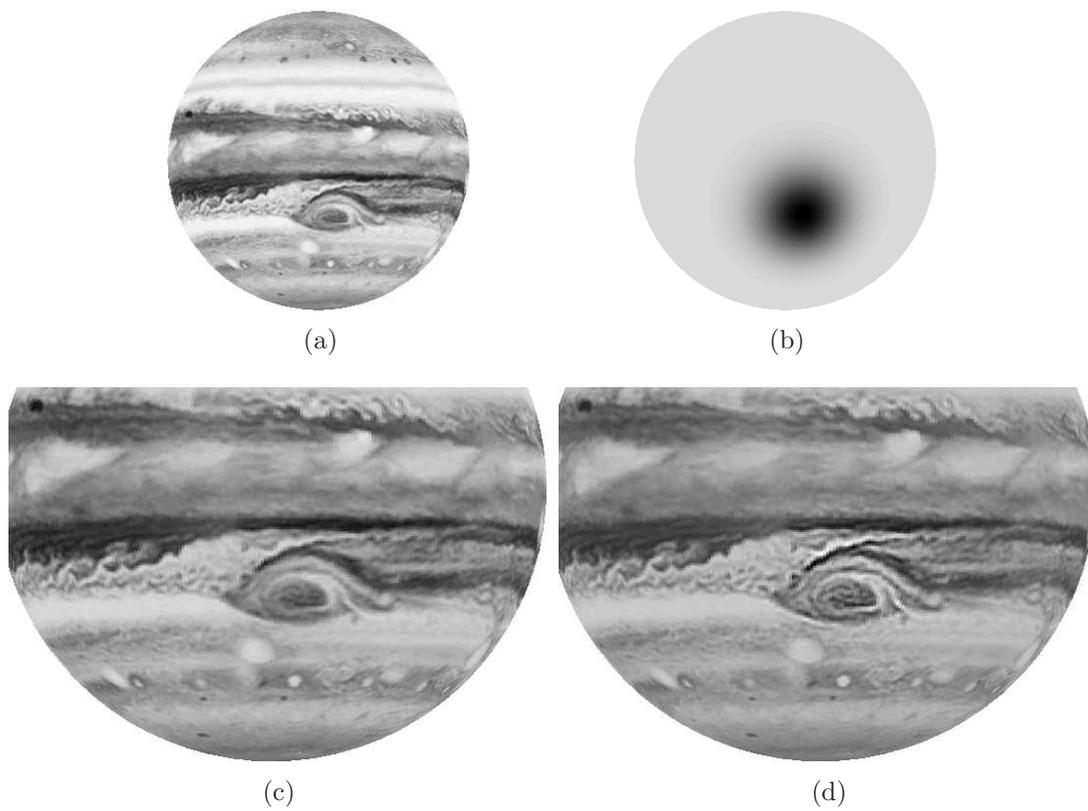


FIG. 4.16 – Augmentation des détails sur la *tache rouge* de Jupiter. (a) Image originale. (b) Masque appliqué à  $W_6$  et à  $H$ . (c) Zoom sur la tache. (d) Zoom sur la tache plus détaillée.

Dans les zones de la sphère où ce masque est proche de 2, les détails correspondant sont par conséquent rehaussés (doublés), tandis que la reconstruction est proche de l'image originale loin de la tache, là où  $M \simeq 1$ .

Cette petite expérience est présentée sur la Figure 4.16. L'image originale est affichée sur la Figure 4.16(a) ainsi que sur la Figure 4.16(c) avec un zoom sur la tache rouge de Jupiter. La Figure 4.16(b) représente le masque  $M$  appliqué à  $W_6$  et à  $H$ . L'image 4.16(d) montre pour finir les données reconstruites après l'application de  $M$ . Les détails de la tache y sont comme prévu améliorés alors que le reste de la sphère est inchangé.

### 4.5.3 Repère sphérique discret $\square$

#### Définition et conditions

Dans cette section, la SCWT est complètement discrétisée. Pour ce faire, nous sélectionnons premièrement les échelles  $a$  comme précédemment, c.-à-d.

$$a \in \alpha = \{a_j \in \mathbb{R}_+^* : a_j > a_{j+1}, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Ensuite, nous choisissons les positions sur des grilles sphériques équi-angulaires (Sec. 1.3.3) de résolution  $j$  et de taille  $2\beta_j \times 2\beta_j$  ( $\beta_j \in \mathbb{N}$ ), c.-à-d.

$$\omega \in \mathcal{G}_j = \{(\theta_{jp}, \varphi_{jq}) \in S^2 : \theta_{jp} = \frac{(2p+1)\pi}{4\beta_j}, \varphi_{jq} = \frac{q\pi}{\beta_j}, p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]\}. \quad (4.174)$$

Comme expliqué à la section 1.3.3, la grille  $\mathcal{G}_j$  permet la discrétisation de toute fonction  $f$  possédant une largeur de bande  $\beta_j$ , c.-à-d. telle que  $f \in \mathcal{B}_{\beta_j}$ . Pour rappel, à chaque résolution  $j$ , les latitudes  $\theta_{jp}$  forment en réalité une grille dite *pseudo-spectrale* et sont localisées sur les noeuds d'un polynôme de Chebyshev d'ordre  $2\beta_j$  [Boy89, DH94].

En résumé, l'espace de discrétisation total est

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \{(a_j, \omega_{j pq}) : j \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]\}, \quad (4.175)$$

avec  $\omega_{j pq} = (\theta_{jp}, \varphi_{jq})$  et pour une certaine gamme de *largeurs de bande*  $\beta = \{\beta_j \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{Z}\}$ .

Etant donnée une ondelette mère  $\psi$  axisymétrique et admissible sur  $S^2$ , la famille d'ondelettes

$$\Psi = \{\psi_{j pq} = R_{[\omega_{j pq}]} D_j \psi : j \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]\} \quad (4.176)$$

constitue un repère pondéré et contrôlé par l'opérateur  $L_\psi^{-1}$  habituel, s'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que, pour toute fonction  $f \in L^2(S^2)$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \nu_j w_{jp} W_j[p, q] \tilde{W}_j^*[p, q] \leq B\|f\|^2, \quad (4.177)$$

en notant  $W_j[p, q] = \langle \psi_{j pq} | f \rangle$ ,  $\tilde{W}_j[p, q] = \langle L_\psi^{-1} \psi_{j pq} | f \rangle$ , et avec  $w_{jp} = w_p^{\beta_j}$ , les poids de quadrature définis en (1.68). Le produit  $\nu_j w_{jp}$  joue ici le même rôle que la mesure  $\frac{da}{a^3} d\mu(\theta, \varphi)$  dans le contexte continu.

**Proposition 4.17.** *Soit la grille de discrétisation  $\Lambda(\alpha, \beta)$  donnée en (4.175),  $\psi$  une ondelette axisymétrique et admissible sur  $S^2$ , et*

$$K_0 = \inf_{l \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{4\pi\nu_j}{2l+1} \mathbb{1}_{[0, \beta_j[}(l) G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2, \quad (4.178)$$

$$K_1 = \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{4\pi\nu_j}{2l+1} \mathbb{1}_{[0, \beta_j[}(l) G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_j(l, 0)|^2, \quad (4.179)$$

$$\delta = \|\mathcal{X}\| = \sup_{(H_l)_{l \in \mathbb{N}}} \frac{\|\mathcal{X}H\|}{\|H\|}, \quad (4.180)$$

avec la matrice infinie  $(\mathcal{X}_{ll'})_{l, l' \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\mathcal{X}_{ll'} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2\pi\nu_j c_j(l, l')}{\beta_j} \mathbb{1}_{[2\beta_j, +\infty[}(l+l') G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_j(l, 0)| |\hat{\psi}_j(l', 0)| \quad (4.181)$$

et  $c_j(l, l') = (2(l + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}} (2(l' + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}}$ . Si

$$0 \leq \delta < K_0 \leq K_1 < \infty, \quad (4.182)$$

alors  $\Psi$  est un repère sphérique pondéré par les poids  $\nu_j w_{jp}$ , contrôlé par  $L_\psi^{-1}$  et de bornes  $K_0 - \delta, K_1 + \delta$ .

La démonstration assez algébrique de cette proposition figure à l'annexe A (Sec. A.4, p. 178). Celle-ci exploite l'orthogonalité jusqu'à l'ordre  $\beta_j$  des harmoniques sphériques discrétisées sur une grille  $\mathcal{G}_j$ . En effet, pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , la proposition 1.5 nous apprend que

$$\int_{S^2} d\mu(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{jp} g(\theta_{jp}, \varphi_{jq}) Y_l^{m*}(\theta_{jp}, \varphi_{jq}), \quad (4.183)$$

pour tout  $g \in \mathcal{B}_{\beta_j}$ . En prenant  $g = Y_{l'}^{m'}$  avec  $l' < \beta_j$ , nous trouvons l'orthogonalité mentionnée.

L'évaluation de  $\|\mathcal{X}\|$  pourrait s'avérer complexe étant donné la dimension infinie de  $\mathcal{X}$ . Cependant, en pratique nous travaillons sur des fonctions  $f \in L^2(S^2)$  à bande limitée, c.-à-d.  $f \in \mathcal{B}_{\beta_M}$ , où  $\beta_M \in \mathbb{N}^0$  est la bande passante de  $f$ . Par conséquent,  $\|\mathcal{X}\|$  peut être remplacé par la norme de la matrice finie  $(\mathcal{X}_{ll'})_{0 \leq l, l' < \beta_M}$ .

Nous avons estimé les bornes d'un repère d'ondelettes DOG sur base des choix suivants. Tout d'abord, les échelles ont été discrétisées dyadiquement avec

$$a_j = a_0 2^{-j}, \quad (4.184)$$

pour  $a_0 = 1$  et  $j \in \mathbb{Z}$ .

	$K_0$	$K_1$	$\delta$	$A = K_0 - \delta$	$B = K_1 + \delta$	$B/A$
$\beta_0 = 2$	0.6691	0.7644	344.2417	—	—	—
$\beta_0 = 4$	0.7313	0.7736	0.0607	0.6707	0.8343	1.2440
$\beta_0 = 8$	0.7313	0.7736	0.0014	0.7299	0.7751	1.0618

TAB. 4.6 – Evaluation de  $K_0$ ,  $K_1$  et  $\delta$  sur des fonctions  $f \in L^2(S^2)$  de bande passante égal à 128.

Ensuite, les largeurs de bandes, associées à la taille des grilles supportant chaque résolution  $j$ , ont été fixées par

$$\beta_j = \beta_0 2^{|j|}, \quad (4.185)$$

pour  $\beta_0 \in \mathbb{N}$ , la bande passante minimale associée à  $\psi_1$ . La valeur absolue entourant  $j$  dans (4.185) tient compte grossièrement de l'effet présenté à la section 2.4.6, à savoir la réapparition de hautes fréquences dans les ondelettes  $\psi_j$  lorsque l'échelle  $a_j$  dépasse une certaine valeur  $\tilde{a}$ . Au vu du graphique de la Figure 2.6,  $\tilde{a}$  est vraisemblablement proche de 1 pour l'ondelette DOG ( $\alpha = 1.25$ ).

Le tableau 4.6 présente finalement le résultat de l'évaluation de  $K_0$ ,  $K_1$  et  $\delta$ , ainsi que celle des bornes des repères associés, pour des fonctions  $f \in \mathcal{B}_{128}$ .

Nous constatons que pour  $\beta_0 \geq 4$ , la condition (4.182) est remplie. Cependant, un repère strict ne peut jamais être atteint lorsque  $\beta_0$  augmente. En effet, si  $\beta_0$  tend vers l'infini, les grilles sphériques de chaque résolution se raffinent indéfiniment, et nous nous rapprochons des repères semi-continus. La section 4.5.2 établit que la discrétisation en échelle à une voix ( $K = 1$ ) donne un rapport  $B/A \simeq 1.0431$ , ce qui constitue par conséquent une limite inférieure pour le rapport des bornes du repère discret.

### Reconstruction approchée

Comme expliqué abstraitement à la section 4.1.5, le repère d'ondelettes  $\{\psi_{j pq}\}$  contrôlé par  $L_\psi^{-1}$  permet de reconstruire approximativement une fonction  $f \in L^2(S^2)$  lorsque que les bornes  $A$  et  $B$  sont proches. Dans ce cas,

$$f(\omega) \simeq \frac{2}{A+B} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \nu_j w_{jp} W_j[p, q] [L_\psi^{-1} \psi_{j pq}](\omega). \quad (4.186)$$

Supposons que la fonction  $f$  soit à bande limitée, c.-à-d.  $f \in \mathcal{B}_{\beta_M}$ , pour un certain  $\beta_M \in \mathbb{N}$ . Dès lors,  $f$  peut être discrétisée sans perte d'information sur une grille  $\mathcal{G}_J$ , où  $J \in \mathbb{N}^0$  est la résolution maximale telle que  $\beta_J = \beta_M$ .

Comme dans le cas semi-continu, la fonction résiduelle  $\eta$  définie en (4.171) peut être introduite pour capter les hautes fréquences délaissées par la restriction  $j \leq J$ .

De cette manière, la reconstruction approchée devient

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{2}f(\omega) \simeq & \sum_{j=-J}^J \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \nu_j w_{jp} W_j[p, q] [L_\psi^{-1} \psi_{jpq}](\omega) + \dots \\ & + \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_M]} H[p, q] [L_\psi^{-1} \eta_{pq}](\omega), \end{aligned} \quad (4.187)$$

où  $H[p, q] = \langle \eta_{pq} | f \rangle$ , et  $\eta_{pq}(\omega) = [R_{[\omega_{Jpq}]} \eta](\omega)$ .

Remarquons qu'il faudrait normalement définir une fonction résiduelle pour les  $j < -J$ . Pratiquement, les contributions de ces résolutions sont cependant faibles car les poids  $\nu_j \propto 2^{2j}$  deviennent rapidement négligeables.

Notons finalement que l'approximation de  $f$  par

$$\begin{aligned} L'_\psi f = & \frac{2}{A+B} \sum_{j=-J}^J \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \nu_j w_{jp} W_j[p, q] L_\psi^{-1} \psi_{jpq} + \dots \\ & + \frac{2}{A+B} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_M]} H[p, q] L_\psi^{-1} \eta_{pq}, \end{aligned} \quad (4.188)$$

peut être améliorée par l'algorithme du gradient conjugué décrit à la section 4.1.3. Il suffit pour cela de considérer  $L'_\psi$  comme le nouvel opérateur de repère, et d'appliquer les itérations données en (4.12).

### Exemple

Nous proposons maintenant de décomposer et de reconstruire l'image  $f$  d'une mappemonde (Fig. 4.17(a)). Cette image est définie sur une grille équi-angulaire  $256 \times 256$  et possède une bande passante  $\beta_M = 128$ .

L'ondelette mère employée pour la décomposition est la DOG ( $\alpha = 1.25$ ). Les paramètres de la grille  $\Lambda(\alpha, \beta)$  définissant le repère sont  $a_0 = 1$  et  $\beta_0 = 4$ , pour des échelles et des largeurs de bande discrétisées selon (4.184) et (4.185). Compte tenu de la taille de l'image ( $\beta_M = 128$ ), la résolution maximale est  $J = 5$ .

Les valeurs  $W_j[p, q]$  ont été obtenues en calculant  $W_f(\omega, a_j)$  sur la grille maximale  $\mathcal{G}_J$ , et en estimant ensuite les coefficients  $W_f(\omega_{jppq}, a_j)$  par interpolation bilinéaire des coefficients  $W_f(\omega_{Jp'q'}, a_J)$  sur la grille  $\mathcal{G}_j$ . Cet artifice est rendu nécessaire par la non-inclusion des grilles  $\mathcal{G}_j$  dans la grille maximale, c.-à-d.  $\mathcal{G}_j \not\subseteq \mathcal{G}_J$  pour tout  $|j| < J$ .

Les Figures 4.17(b), 4.17(c) et 4.17(d) présentent respectivement les coefficients en ondelettes  $W_0[p, q]$ ,  $W_2[p, q]$  et  $W_4[p, q]$ .

Pour la reconstruction approchée de l'image, la fonction  $G_\psi(l)$ , intervenant dans la définition de l'opérateur  $L_\psi$ , a tout d'abord été estimée à l'aide de (4.165) en prenant  $K = 10$  voix. La Figure 4.18(b) donne la reconstruction de la mappemonde réalisée par (4.187) en prenant  $\frac{2}{A+B} \simeq 1.3289$  sur base des valeurs du tableau 4.6. La différence  $f - L'_\psi f$  entre l'image originale et la reconstruction approchée est donnée sur la Figure 4.18(c). Au

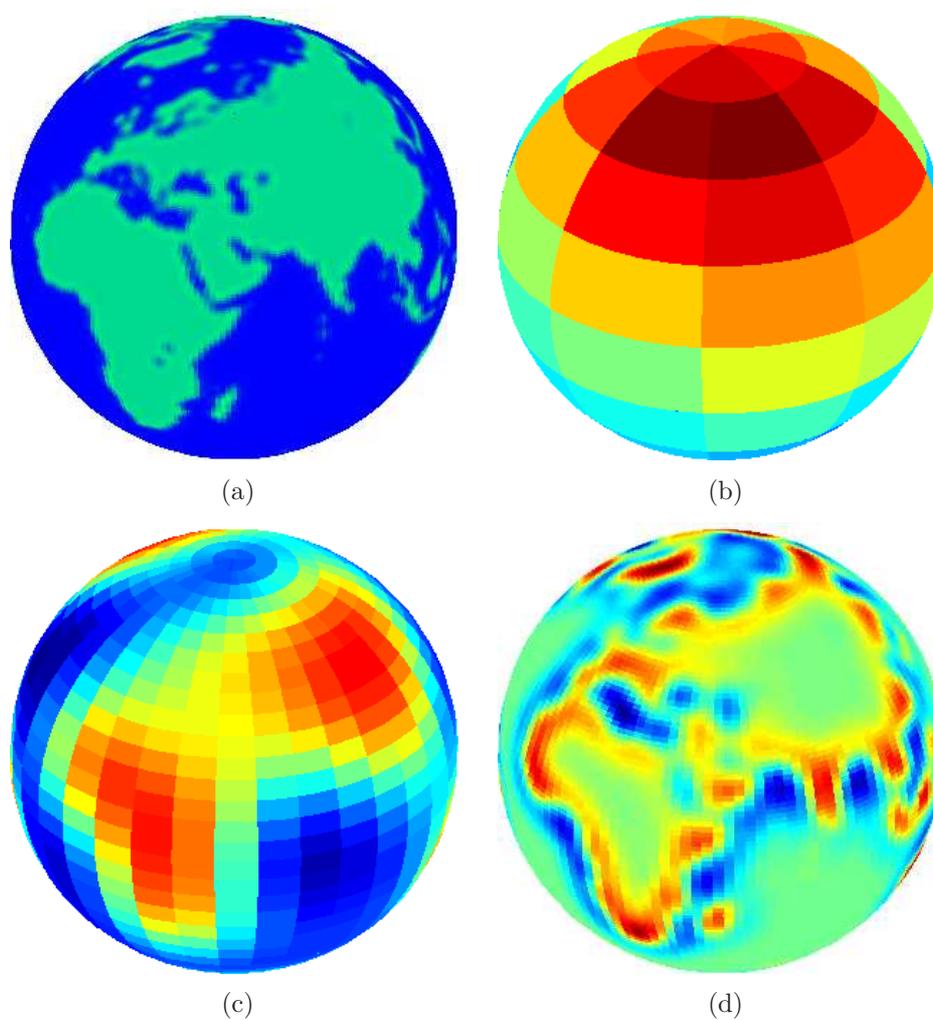


FIG. 4.17 – Décomposition d'une mappemonde par un repère d'ondelettes DOG. (a) Image originale (grille  $256 \times 256$ , bande passante  $\beta = 128$ ). (b)  $W_0[p, q]$ . (c)  $W_2[p, q]$ . (d)  $W_4[p, q]$ .

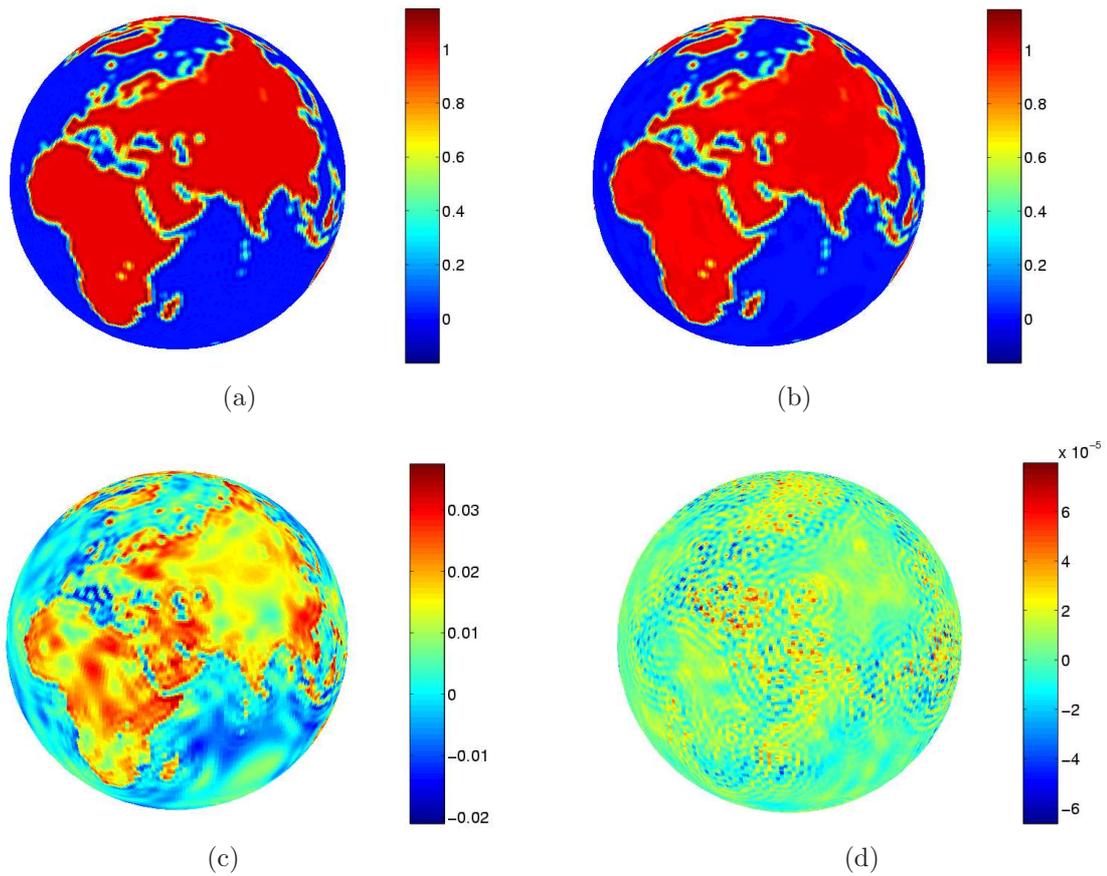


FIG. 4.18 – Reconstruction d’une mappemonde par un repère d’ondelette DOG. (a) Image originale. (b) Reconstruction. (c) Différences entre l’image originale et la reconstruction. (d) Différences entre l’image originale et la reconstruction  $f^{(3)}$  obtenue par la méthode du gradient conjugué après 3 itérations.

vu des amplitudes de cette différence, la reconstruction  $L'_\psi f$  est donc fort proche de l'image  $f$ . Une meilleure approximation peut cependant être atteinte par l'emploi de l'algorithme du gradient conjugué. La Figure 4.18(d) présente la différence entre  $f$  et l'approximation  $f^{(3)}$  obtenue après seulement 3 itérations. Les amplitudes de  $f - f^{(3)}$  sont en moyenne 400 fois plus faibles que celles de  $f - L'_\psi f$ . Ceci se reflète aussi dans la norme  $L^2$  de ces différences :  $\|f - L'_\psi f\| \simeq 0.48$ , tandis que  $\|f - f^{(3)}\| \simeq 3.97 \cdot 10^{-5}$ .

#### 4.5.4 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté des discrétisations de la transformée continue en ondelettes sphérique garantissant la reconstruction des fonctions analysées. Ceci nous a mené à la construction de repères sphériques semi-continus et discrets. Dans chaque cas, il est clair que l'utilisation de l'opérateur de repère continu  $L_\psi$  assure un meilleur rapprochement des bornes des repères. En outre, pour le repère discret, la géométrie particulière de l'espace de discrétisation spatial a rendu nécessaire l'introduction de poids. Ces derniers permettent alors le traitement des conditions de repère en Fourier, en les découplant des données analysées.

Au final, les repères sphériques semi-continus et discrets engendrés héritent des propriétés intéressantes de la SCWT. Le paramètre d'échelle, même discrétisé, possède un sens géométrique précis grâce à l'emploi de la dilatation stéréographique. En outre, cette transformation préserve une éventuelle compacité du support des ondelettes sur  $S^2$ , propriété souvent appréciée en traitement de signaux (compression, algorithme rapide, ...).

Ce point crucial rend nos méthodes complémentaires à celles développées en [FMZ03, NW96]. Malgré une décomposition multi-échelle efficace des signaux sphériques, le facteur de dilatation  $y$  est en effet un paramètre arbitraire relié à une transformation fréquentielle des ondelettes. La localité de ces fonctions en position n'est donc pas garantie, et a fortiori, non ajustable analytiquement.

Sur un autre front, il serait intéressant d'observer si d'autres discrétisations spatiales sont possibles pour la réalisation d'un repère d'ondelettes sphérique.

Parmi les grilles équi-angulaires, il existe par exemple la grille

$$\tilde{\mathcal{G}}_b = \{(\theta_p, \varphi_q) : \theta_p = p \frac{\pi}{2b}, \varphi_q = q \frac{2\pi}{2b}, p, q \in \mathbb{N}, p \leq 2b, q < 2b\} \quad (4.189)$$

qui respecte l'inclusion  $\tilde{\mathcal{G}}_b \subset \tilde{\mathcal{G}}_{2b}$ . A cette grille, sont associés les poids de Clenshaw-Curtis [CC60] permettant également le calcul des coefficients de Fourier jusqu'à l'ordre  $l = b - 1$ .

Un dernier type de grille équi-angulaire est réalisé en prenant les latitudes  $\theta_p$  sur les zéros d'un polynôme de Legendre. Ceci donne lieu aux règles de quadrature de Gauss-Legendre, où l'ordre de l'espace fréquentiel est identique à la taille de l'espace spatial.

Finalement, l'emploi de grilles *équi-distribuées*, où chaque point est le centre d'une cellule de surface constante [CF97, GHR], pourrait aussi être exploré. Dans ce cas, les conditions nécessaires à la réalisation d'un repère devront probablement être traitées spatialement. Ceci permettrait peut-être d'exploiter pleinement l'expression analytique de la dilatation stéréographique, ce qui n'est pas le cas avec notre approche spectrale.



# Chapitre 5

## Des ondelettes sur la couronne solaire

Les images de l’atmosphère solaire fournies par l’instrument EIT<sup>1</sup> à bord du satellite SoHO<sup>2</sup> sont parmi les images astronomiques les plus riches. La détection et la classification automatique des phénomènes observés, devenues indispensables par la grande quantité d’enregistrements disponibles, sont des problèmes ardues de traitement d’images auxquels la transformée continue en ondelettes et ses extensions apportent des éléments de solutions.

### 5.1 Introduction

Le soleil et les phénomènes naturels qu’il engendre ont de tout temps passionné les Hommes. Les plus curieux ont recherché au cours des âges les meilleurs instruments et techniques leur permettant de mieux sonder notre astre, augmentant ainsi la compréhension de son fonctionnement par les observations récoltées.

Dans ce chapitre nous exposons comment l’approche “ondelettes” présentée dans les chapitres précédents, apporte une aide appréciable au travail de l’astrophysicien dans sa compréhension des mécanismes fondamentaux inhérents à l’activité solaire.

Nous commençons par présenter quelques notions de physique solaire, pour ensuite introduire l’expérience SoHO/EIT dont est issue la matière première de nos analyses : les images de la *couronne solaire* et de la *zone de transition*.

La transformée continue en ondelettes, et en particulier sa capacité à explorer la régularité locale d’une fonction (Sec. 3.1), est ensuite exploitée pour détecter les traces laissées par les rayons cosmiques sur les images EIT.

Finalement, une détection et une caractérisation des *points brillants* (BPs) de la couronne solaire sont réalisées à l’aide des *tubes de maxima* [BR95] obtenus avec un repère isotrope et linéaire d’ondelettes ASF (Sec. 4.4.6).

---

<sup>1</sup>*Extreme ultraviolet Imaging Telescope.*

<sup>2</sup>*Solar and Heliospheric Observatory.*

## 5.2 Notions de physique solaire

### 5.2.1 Caractéristiques générales

Le soleil a une masse de  $2 \cdot 10^{30}$  kg. Son rayon<sup>3</sup>  $R_{\odot}$  est estimé à 696 000 km et sa puissance lumineuse totale actuelle est évaluée à  $3.9 \cdot 10^{26}$  W. Selon les modèles récents, notre astre aurait un âge de 4.6 milliards d'années et se serait formé par l'accrétion d'un nuage de gaz composé principalement d'hydrogène et d'hélium.

### 5.2.2 Structure globale

Le soleil est structuré en différentes zones : l'*intérieur*, la *photosphère*, la *chromosphère*, la *région (ou zone) de transition* et la *couronne*.

#### L'intérieur du soleil

Le modèle standard du soleil découpe sa structure interne en trois zones sièges de phénomènes physiques dominants différents.

En premier lieu vient le *coeur* (ou noyau) où se produisent les réactions de fusion nucléaire, comme celle du cycle proton-proton [Phi92], première source d'énergie solaire. Ce coeur s'étend approximativement du centre du soleil jusqu'à un quart du rayon solaire et sa température estimée est de  $15.6 \cdot 10^6$  K.

Ensuite vient la *zone de radiation* où l'énergie produite par le coeur est transportée vers l'extérieur du soleil par radiation. Cette zone s'arrête vers  $0.7 R_{\odot}$  lorsque les mouvements de convection prennent le pas sur les processus de radiation dans la diffusion de l'énergie du coeur.

La *zone de convection* commence alors pour se terminer sous la fine *photosphère*.

#### La photosphère

La photosphère, littéralement sphère de lumière, est une couche de gaz de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur où l'énergie transmise depuis le coeur est irradiée principalement dans la gamme de lumière visible et infrarouge. La photosphère caractérise la surface visible du soleil et le rayon solaire est conventionnellement fixé au rayon externe de cette couche.

Un des phénomènes visibles les plus caractéristiques de la photosphère est sa *granulation*. Cette dernière est constituée d'une myriade de cellules de convection séparées de 1000 à 1400 km, chacune ayant une durée de vie moyenne de quelques minutes.

La photosphère contient aussi des *taches solaires* observables dans le spectre de lumière visible. Celles-ci ont une taille maximale de 25 000 km. Elles apparaissent comme une zone sombre (l'*ombre*), relativement au niveau lumineux ambiant, entourée d'une zone plus

---

<sup>3</sup>En réalité, le rayon de la photosphère décrite plus loin.

claire (la *pénombre*). Leur température, de l'ordre de 4500 K, est plus faible que celle de la photosphère (environ 5780 K).

### La chromosphère

La chromosphère est une couche très ténue de la structure solaire. Son épaisseur est de quelques milliers de kilomètres et sa température varie de 4000 K à 10 000 K. Sa faible densité la rend presque transparente à la lumière produite dans la photosphère. Son observation est cependant possible dans certaines gammes de longueurs d'onde comme celle de la raie d'hydrogène  $H\alpha$ .

### La zone de transition

La zone de transition est une interface (thermale) entre la chromosphère et la couronne solaire. Elle est caractérisée par une élévation soudaine de la température. Celle-ci passe de quelques milliers de degrés Kelvin à une température avoisinant  $10^6 K$  sur une très courte distance (entre 10 et 100km). Sa géométrie est donc très morcelée, voire fractale.

### La couronne solaire

Au delà de la zone de transition, s'étend la couronne solaire. Sa température est supérieure à  $10^6 K$ . Les raisons physiques de son "chauffage" sont probablement multiples (dissipation d'ondes magnétohydrodynamiques, reconnections magnétiques, ...) et restent actuellement débattues. Etant donné les températures qui y sont atteintes, la couronne solaire émet du rayonnement X et de l'ultraviolet. Ces gammes de longueurs d'ondes sont employées pour observer la couronne indépendamment des autres couches solaires (expérience SoHO/EIT, Trace, ...). Nous le verrons plus loin, la couronne solaire est le siège d'une multitude de phénomènes physiques (régions actives, trous coronaux, boucles magnétiques, bright points, ...) tous reliés à la richesse topologique du champ magnétique ambiant, et à la physique des plasmas<sup>4</sup>.

## 5.2.3 Le cycle solaire

L'activité du soleil est régie par un cycle principal, le *cycle solaire*, de période moyenne égale à 11.2 ans. Ce cycle s'est manifesté historiquement par les variations du nombre de taches solaires (nombre de *Wolf*) ainsi que dans la dérive de leur localisation azimutale entre les 40<sup>èmes</sup> parallèles de la sphère solaire [Phi92].

Le maximum d'un cycle solaire est caractérisé par des maxima dans le nombre de taches solaires et dans le rayonnement électromagnétique solaire. Les cycles solaires sont comptabilisés depuis 1761 (Tab. 5.1). Nous sommes actuellement (en 2004) dans le 23<sup>ème</sup> cycle et son maximum a eu lieu en 2001.

---

<sup>4</sup>Gaz complètement ionisé.

Notons qu'au niveau du champ magnétique solaire, le cycle solaire possède en réalité une période de 22 ans car les pôles magnétiques du soleil s'inversent entre chaque cycle de 11 ans.

N°	Date	N°	Date	N°	Date
1	1761	9	1848	17	1939
2	1770	10	1860	18	1947
3	1778	11	1872	19	1958
4	1788	12	1884	20	1968
5	1804	13	1894	21	1981
6	1816	14	1906	22	1991
7	1828	15	1917	23	2001
8	1838	16	1928	24	(2012)

TAB. 5.1 – Dates et numéros des maxima de chaque cycle solaire depuis le début de leur enregistrement en 1761.

## 5.3 L'expérience SoHO/EIT

### 5.3.1 Présentation

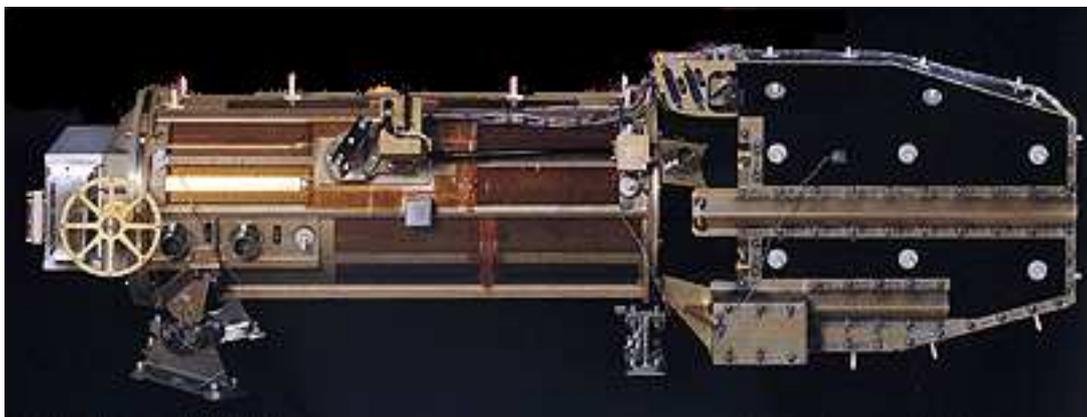


FIG. 5.1 – Le télescope EIT embarqué à bord du satellite SoHO au coté de 12 autres instruments scientifiques.

Depuis le 2 janvier 1996, le télescope EIT (*Extreme-ultraviolet Imaging Telescope*, Figure 5.1) à bord du satellite SoHO (*Solar and Heliospheric Observatory*) observe le soleil dans quatre bandes passantes centrées sur quatre longueurs d'ondes de l'ultraviolet lointain (EUV) : 171 Å, 195 Å, 284 Å, et 304 Å [Del95, Ma97, EIT].

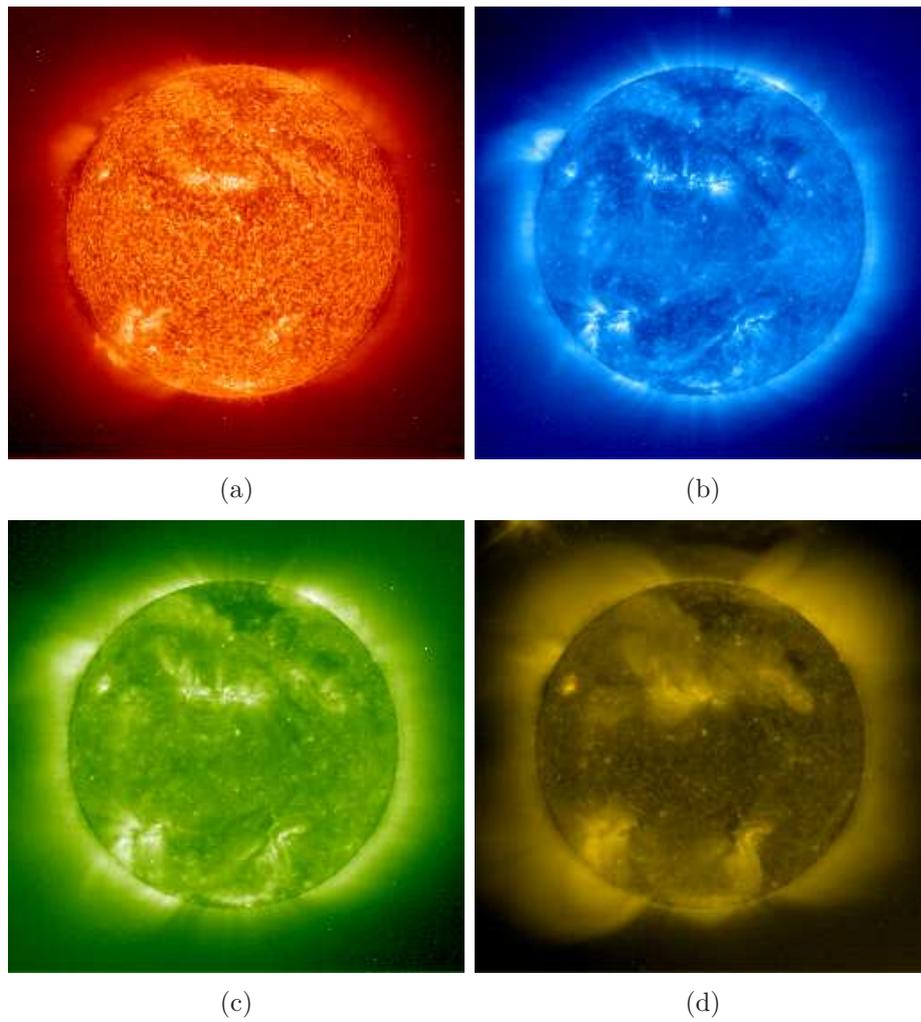


FIG. 5.2 – Quatre images enregistrées par le télescope EIT. (a) 304 Å. (b) 171 Å. (c) 195 Å. (d) 284 Å. Les couleurs sont purement conventionnelles.

Celles-ci ont été sélectionnées pour leurs correspondances avec les raies d'émission dominantes des atomes de fer et d'hélium ionisés, respectivement, Fe IX-X, Fe XII, Fe XV et He II<sup>5</sup>

L'observation du soleil à ces différentes longueurs d'ondes revient au premier ordre à analyser les régions de ce dernier atteignant les températures nécessaires à la production des raies d'émissions associées.

Les raies 171 Å, 195 Å, 284 Å permettent l'observation de trois régimes en température dans la *couronne solaire*, tandis que la quatrième révèle la *région de transition*. Ces correspondances sont résumées au tableau 5.2 où la longueur d'onde de chaque classe d'images est mise en relation avec la région solaire observée et avec la température caractéristique de cette dernière.

Longueur d'onde	Raie	Température	Région solaire	Convention de Couleur
171 Å	Fe IX-X	1 10 <sup>6</sup> K	Couronne Solaire	Bleu
195 Å	Fe XII	1.6 10 <sup>6</sup> K	Couronne Solaire	Vert
284 Å	Fe XV	2 10 <sup>6</sup> K	Couronne Solaire	Jaune
304 Å	He II	2 10 <sup>4</sup> – 8 10 <sup>4</sup> K	Région de transition	Rouge

TAB. 5.2 – Relation entre longueur d'onde, raie(s) d'émission, température, région solaire et couleur (conventionnelle) des images EIT.

### 5.3.2 Acquisition des images

Le télescope EIT suit le schéma optique de Ritchey-Chrétien. Il est composé de deux miroirs hyperboliques subdivisés en quatre quadrants. Chacun d'eux est le résultat de dépôts successives de fines couches de molybdène-silicium dont l'épaisseur totale extrait par réflexion la longueur d'onde désirée. Un filtre rotatif sélectionne par masquage le quadrant servant à l'observation solaire. Une caméra CCD<sup>6</sup> enregistre finalement l'ensemble de l'image en transformant le flux lumineux en charges électriques à raison de

$$N_{e/\gamma} = \frac{12398}{3.65\lambda} \quad (5.1)$$

électrons par photon, avec  $\lambda$  la longueur d'onde exprimée en Å. Cette caméra rend en sortie un signal établi sur 14 bits, chaque *nombre digital*<sup>7</sup> (DN) correspondant à l'enregistrement de  $d = 16.7$  électrons (*constante de numérisation* ou *digitization constant*). Sur base de  $N_{e/\gamma}$ , le nombre de photon par DN, noté  $N_{\gamma/\text{DN}} = d N_{e/\gamma}^{-1}$ , est donc calculable pour chaque longueur d'onde (Tab. 5.3).

<sup>5</sup>La notation en chiffres romain provient de la spectroscopie. Elle correspond au nombre d'électrons enlevés à l'atome associé moins une unité. Fe XII équivaut ainsi à l'atome de fer 11 fois ionisé, c.-à-d. Fe<sup>11+</sup>.

<sup>6</sup>Charge-Coupled Device.

<sup>7</sup>Autrement dit, la distance entre deux nombres consécutifs du codage.

$\lambda$	171 Å	195 Å	284 Å	304 Å
$N_{\gamma/\text{DN}}$	1.19	1.04	0.72	0.67

TAB. 5.3 – Le nombre de photons par DN en fonction de la longueur d'onde.

En mode *synoptique*, EIT observe la totalité du disque solaire dans les quatre longueurs d'onde à raison d'une image  $1024 \times 1024$  codée sur 14 bits (image *FF/FR* pour *Full Field of view/Full Resolution*) approximativement toutes les 6 heures (quatre par jour). Chaque pixel équivaut à une taille angulaire de  $2.6'' \times 2.6''$  sur des images EIT *FF/FR* observant ainsi une zone de  $45' \times 45'$ .

En mode “CME<sup>8</sup> Watch”, la cadence d'enregistrement peut devenir plus élevée (jusqu'à une image toutes les 10 à 15 minutes) avec une résolution souvent dégradée de moitié.

Les images EIT sont soumises à deux types de bruits supposés indépendants : un bruit Poissonnien issu du comptage des photons (*shot noise*) et de variance proportionnelle à l'intensité de l'image, et un bruit de lecture de la caméra CCD de variance constante.

### 5.3.3 Conventions

Les images enregistrées par EIT sont conventionnellement scindées en trois zones : le disque solaire (*ondisk*), la partie hors-disque (*offdisk*) et le limbe.

La première est définie par un disque centré sur le centre du soleil et de rayon égal à 95% du rayon apparent  $R_{\odot}$  de ce dernier<sup>9</sup>.

La seconde correspond à la zone extérieure à un disque centré sur le soleil et de rayon égal à 105% de  $R_{\odot}$ .

Finalement, le limbe est à l'interface des deux premières parties.

### 5.3.4 Objectifs

Depuis l'acquisition de sa première image en 1996, EIT a enregistré plus de 170 000 images dans les quatre longueurs d'onde précitées et selon différents modes (Tab. 5.4).

	304 Å	171 Å	195 Å	284 Å
FF/FR	9 563	5 581	61 858	5 596
FF/HR	3 307	2 479	38 437	1 415

TAB. 5.4 – Nombres d'images enregistrées par longueur d'onde depuis 1996 (jusqu'en 2001). FF : *Full field of view* ( $45'$  par  $45'$ ). FR : *Full Resolution* ( $1024 \times 1024$  pixels). HR : *Half Resolution* ( $512 \times 512$  pixels) [HCV00].

<sup>8</sup>Coronal Mass Ejection.

<sup>9</sup> $R_{\odot}$  étant le rayon solaire apparent.

Il est par conséquent devenu impossible d'analyser l'ensemble de ces photographies "à l'oeil nu", et des techniques automatiques de détection d'évènements solaires, tels ceux décrits à la section 5.3.5, doivent être mises sur pied.

C'est le passage obligé pour observer l'évolution du soleil sur le long terme et pour espérer classifier, modéliser et comprendre l'ensemble des phénomènes physiques apparaissant dans les enregistrements.

Nous voyons dans les sections suivantes comment la transformée en ondelettes prise comme un outil de traitement d'images s'associe à cette objectif.

### 5.3.5 La couronne solaire vue par EIT

Les observations transmises par EIT ont confirmé l'idée que les phénomènes physiques apparaissant dans la couronne solaire et dans la zone de transition sont issus principalement de l'activité magnétique solaire et de son influence sur les plasmas coronaux.

Afin de faciliter la lecture des sections suivantes, voici un glossaire de la plupart des phénomènes observés sur les images EIT classés (approximativement) par taille caractéristique croissante.

**Filaments** Les filaments (ou protubérances) sont des régions froides et denses de la couronne solaire soutenue dans la gravité solaire par un fort champ magnétique. Leur observation est possible *en émission* sur les images EIT à 304 Å, et *en absorption* aux trois autres longueurs d'onde. En dehors du disque solaire, celles-ci apparaissent brillantes, tandis qu'elles correspondent à des fibres sombres sur le disque. Ces objets peuvent très rapidement présenter un comportement instable et mener à des éruptions de la taille du rayon solaire.

**Spicule** Une *spicule* est le nom donné à de petits jets de matière (gaz) en provenance de la chromosphère le long des lignes de champ magnétique orientées radialement. Bien que pénétrant dans la couronne solaire, leur température caractéristique est celle de la chromosphère ( $< 10^5$  K). Leur durée de vie moyenne est d'une dizaine de minutes.

**Réseau magnétique** Le *réseau magnétique* (*magnetic network*) est engendré par des flux magnétiques de petite échelle issus des mouvements de convection du manteau solaire. Il en résulte un aspect texturé "granuleux" des images EIT enregistrées en 304 Å. Les lignes de champ magnétique sont rassemblées au bord des cellules de convection et, par leurs interactions, engendrent l'échauffement du plasma dans la chromosphère et la couronne. Ce réseau contient d'innombrables *boucles magnétiques* de faibles tailles.

**Brightenings** Les *brightenings* (ou micro-flares) sont des évènements de petite échelle (parfois presque ponctuels relativement à la résolution des images) et de durée de vie variable (de quelques minutes à quelques heures). Leur apparition supposée est issue d'un changement de topologie magnétique conduisant à un niveau d'énergie plus faible. Les

brightenings sont visibles dans toutes les images EIT même s'il n'est pas certain qu'ils appartiennent tous à la même classe.

**Flares** Un *flare* est une explosion lumineuse très brève et très énergétique dans une *région active*. Un flare est parfois accompagné par la propagation d'une onde de choc dans son environnement proche (onde de Moreton [Phi92]). Après un flare, le champ magnétique se redistribue dans la région active sous la forme d'une rangée de boucles magnétiques (*post flare loops*).

**Points brillants (BPs)** Les points brillants (ou BPs, pour *bright points*) sont caractérisés par une augmentation du flux lumineux sur une zone très localisée de la couronne solaire. Leur taille moyenne avoisine les 30" à 40", sans excéder toutefois 60", soit moins de 23 pixels sur une image EIT *FF/FR*. Les BPs sont principalement localisés dans les régions de couronne calme (*Quiet Corona*) et dans les trous coronaux. Ils apparaissent au-dessus de zones magnétiques bipolaires de la chromosphère. A ce titre, un point brillant est une *région active* de très faible taille. La durée de vie d'un BP est inférieure à deux jours [ZKW01].

**Boucles magnétiques** Les *boucles magnétique* sont des lignes de champ connectant des zones de polarités magnétiques différentes. Bien que leur nature exacte soit sujette à controverse, elles sont vraisemblablement remplies de plasma à des températures typiques de la couronne solaire, c.-à-d. de l'ordre de  $10^6$  K, ce qui les rend visibles dans les longueurs d'ondes de l'ultraviolet lointain.

**Régions actives (AR)** Une *région active* (AR pour *active region*) présente une grande augmentation du rayonnement EUV dans les images EIT. La taille typique d'une AR commence à 10% du rayon solaire (de l'ordre de 40 pixels). Elle contient de la matière à haute température ( $\sim 10^6$  K) localisé dans les boucles magnétiques apparaissant dans les zones de forts champs magnétiques. Les régions actives sont généralement localisées au-dessus des taches solaires présentes dans la photosphère. Elles apparaissent dans deux bandes de latitude qui se rapprochent statistiquement de l'équateur avec l'évolution du cycle solaire (latitude minimale au maximum du cycle).

**Trous coronaux** Les trous coronaux correspondent à des zones de faible intensité lumineuse sur les images EIT (171 Å, 195 Å et 284 Å). Ces zones sont plus froides comparativement au reste de la couronne solaire. Ceci s'explique par la présence de lignes de champ magnétique ouvertes qui induisent un transfert rapide de l'énergie vers l'espace interplanétaire. Au minimum du cycle solaire, il existe deux trous coronaux localisés aux pôles et donnant lieu à une configuration dipolaire du champ magnétique global. Avec l'évolution du cycle solaire, la rotation différentielle de l'équateur tord longitudinalement ce champ magnétique, modifiant en même temps la morphologie des trous coronaux. Au maximum du cycle, ces derniers ont une structure très torturée et s'observent jusqu'à l'équateur.

**Couronne calme** La couronne calme (ou *quiet corona*) est la zone de la couronne solaire localisée en dehors des régions actives et des trous coronaux. Hormis l'apparition de BPs, cette zone est assez homogène.

### 5.3.6 Réponse lumineuse des phénomènes coronaux

Phénomène	Température ( $10^6$ K)	Réponse (DN/s) 195Å
Plume (base)	1.35	(+)50
Trou coronal	$1.3 \sim$ (+)1.4	(+)20
(X ray) Bright Point	1.8	(+)175
Couronne calme	-	(*)55
Région active	2.5	(§)100

TAB. 5.5 – Réponse théorique de EIT à différents phénomènes solaires à 195 Å. (+) Valeur observée dans [Ma97]. (\*) Valeur observée dans [ZKW01]. (§) Valeur employée dans [NHK03].

Grâce aux longueurs d'onde sélectionnées pour l'observation du soleil, EIT est capable d'observer ce dernier dans une gamme de températures s'étalant de  $6 \cdot 10^4$  K à  $3 \cdot 10^6$  K. Sur base de la physique des plasmas et des connaissances actuelles des phénomènes solaires décrits à la section 5.3.5, la réponse théorique de EIT à ceux-ci est calculable dans les différentes longueurs d'onde [Del95] (Tab. 5.5). En outre, plusieurs articles permettent d'affiner ces estimations par des valeurs expérimentales postérieures au lancement de SoHO.

### 5.3.7 Estimation du niveau de bruit

Nous avons vu à la section 5.3.2 que le bruit accompagnant les images EIT se scinde en un bruit Poissonien  $\epsilon_\gamma$  issu du comptage des photons et de variance proportionnelle à l'intensité de l'image, et un bruit de lecture de la caméra CCD  $\epsilon_r$  de variance constante, c.-à-d.

$$\epsilon = \epsilon_\gamma + \epsilon_r. \quad (5.2)$$

Il a été établi [Def99] que la déviation standard  $\sigma$  de  $\epsilon$  suit la loi

$$\sigma = \sqrt{N_{\gamma/\text{DN}} I_p + 2.7}, \quad (5.3)$$

où  $I_p$  est l'intensité (hypothétique) de l'image non bruitée, et  $N_{\gamma/\text{DN}}$  le nombre de photons par DN sur chaque pixel de la caméra CCD (Tab. 5.3).

Un estimateur de  $\sigma$  peut être obtenu en employant par exemple un filtre médian de l'image bruitée  $I$  comme estimateur de  $I_p$ . Autrement dit, en calculant

$$[\mathcal{M}_L I](\vec{x}_{mn}) = \underset{(p,q) \in B_L(m,n)}{\text{med}} I(\vec{x}_{pq}), \quad (5.4)$$

avec  $\vec{x}_{mn} = (m, n)$  et  $B_L(m, n) = [m - L, m + L] \times [n - L, n + L]$ , un voisinage carré de largeur  $2L + 1$  ( $L \in \mathbb{N}$ ) du point  $\vec{x}_{mn}$ .

Dans ce cas, une estimation  $\sigma_e$  de  $\sigma$  est définie selon

$$\sigma_e = \sqrt{N_{\gamma/\text{DN}} \mathcal{M}_L I + 2.7}. \quad (5.5)$$

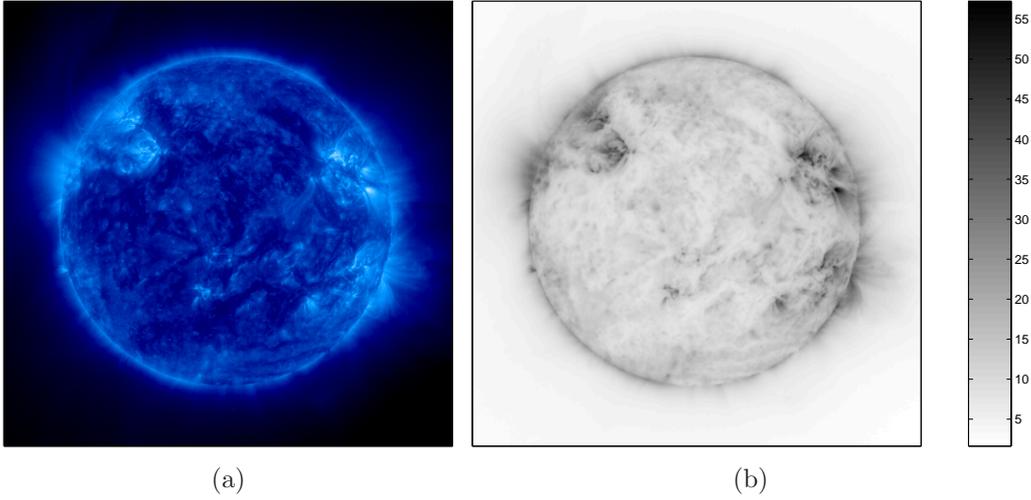


FIG. 5.3 – Estimation du niveau de bruit d'une image EIT ( $171 \text{ \AA}$ )  $1024 \times 1024$ . (a) Image originale. (b) Niveau de bruit en DN estimé à partir de (5.5) pour  $L = 1$ .

## 5.4 Sur la trace des rayons cosmiques $\square$

Les images enregistrées par l'instrument EIT à bord du satellite SoHO dans l'ultraviolet lointain (EUV) présentent un bruitage additionnel particulier différent de celui décrit à la section 5.3.2.

Il s'agit du *parasitage cosmique* issu de l'impression de la caméra CCD de EIT par des particules de haute énergie (protons) en provenance du vent solaire ou de sources non définies dans notre galaxie.

Lorsque ceux-ci interagissent avec EIT, une partie de leur énergie se dépose sur l'enregistrement des images solaires donnant lieu à des *traces cosmiques*<sup>10</sup>. Une telle trace peut présenter des formes variables dépendant de la trajectoire du rayon cosmique impliqué.

En effet, lorsque l'angle d'attaque de ce dernier sur la caméra est important (proche de  $90^\circ$ ), une tache blanche localisée sur quelques pixels apparaît sur l'image (Figure 5.4(b)).

Par contre, si cet angle est faible, la déposition d'énergie s'effectue sur une plus grande distance générant un trait brillant de longueur variable (Fig. 5.4(c)).

Autrement dit, l'instrument EIT agit comme un détecteur de protons, gênant du même coup les astrophysiciens s'occupant de physique solaire.

<sup>10</sup>Nommées *Cosmic Ray Hits* en anglais.

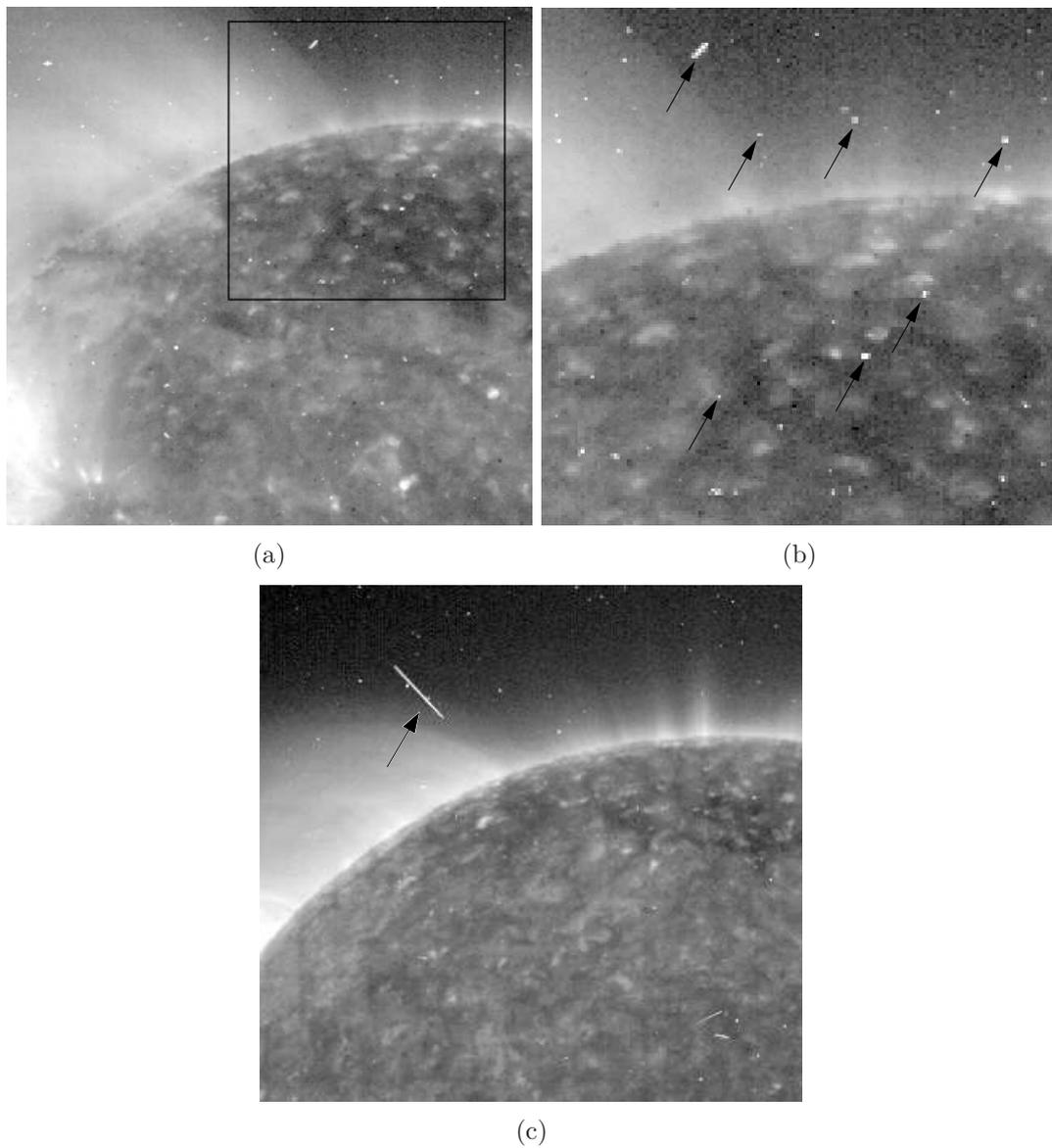


FIG. 5.4 – Traces cosmiques sur deux images EIT 284 Å. En haut, exemples de traces cosmiques. A droite, quelques traces cosmiques sont pointées sur un zoom de l'image de gauche. En bas, un exemple de trait cosmique.

Il existe de nombreuses techniques permettant la suppression de traces cosmiques sur des images astronomiques. Nous pouvons distinguer parmi celles-ci deux grandes classes [Dok01] :

- les méthodes à *expositions multiples*, opérant sur plusieurs images enregistrées sur des temps proches ;
- les méthodes à *exposition unique*, tirant parti de l'information d'une seule image.

La première classe tient compte du fait qu'une trace cosmique apparaît rarement deux fois au même endroit sur un nombre restreint d'observations rapprochées, alors que l'objet physique étudié varie assez peu sur cette même séquence temporelle [Zha95].

Dans la seconde catégorie, une seule observation est analysée et épurée de ces traces cosmiques. Les particularités de celles-ci sont alors exploitées pour les distinguer des autres événements observés (étoiles, galaxies, objets solaires, ...). Dans [Pyc04], les traces cosmiques sont détectées au moyen d'histogrammes en intensité réalisés sur des portions de l'image totale. La décorrélation mentionnée précédemment s'y manifeste par la présence d'îlots liés à ces traces. Dans [Dok01], la détection s'effectue sur la convolution de l'image analysée par un chapeau mexicain de taille minimale. En tirant parti du caractère singulier des traces cosmiques, ce procédé permet leur localisation indépendamment de leur morphologie.

Nous proposons dans cette section une nouvelle approche de détection de traces cosmiques à partir d'une seule image. Celle-ci améliore une technique rudimentaire de traitement d'image, à savoir le  $\sigma$ -seuillage<sup>11</sup> [Pyc04], en lui ajoutant une analyse de régularité Hölderienne locale (Sec. 3.1.2).

### 5.4.1 Caractérisation et algorithme $\square$

Pour être observable, une trace cosmique sur une image EIT doit premièrement dépasser de plusieurs fois le niveau de bruit ambiant relativement au comportement moyen de l'image.

Dans une première phase, la détection de traces cosmiques peut être réalisée par un  $\sigma$ -seuillage. Soit  $I$  une image EIT contenant un bruit Poissonien et un bruit de lecture décrits à la section 5.3.2. La formule (5.5) fournit un estimateur  $\sigma_e$  de la déviation standard du bruit total, à savoir

$$\sigma_e = \sqrt{N_{\gamma/\text{DN}} \mathcal{M}_L I + 2.7},$$

où  $\mathcal{M}_L I$  est un estimateur de l'image non bruitée. Ce dernier est le résultat d'un filtrage médian de  $I$  de taille  $L \in \mathbb{N}$  réalisé par (5.4). Selon la caractérisation précitée, les traces cosmiques appartiennent à l'ensemble

$$\Sigma_{\kappa_0}(I) = \{ \vec{x}_{mn} : (I(\vec{x}_{mn}) - [\mathcal{M}_L I](\vec{x}_{mn})) \geq \kappa_0 \sigma_e(\vec{x}_{mn}) \}, \quad (5.6)$$

---

<sup>11</sup>Ou  $\sigma$ -clipping.

pour une certaine constante  $\kappa_0 \in \mathbb{R}_+^*$  fixant le niveau de seuillage. Outre les traces cosmiques, il est clair que l'ensemble  $\Sigma_{\kappa_0}(I)$  contient d'autres objets solaires significatifs au sens du seuillage appliqué (*flares*, pics d'intensité en régions actives, *bright points*, ...). Il faut donc raffiner la (pré)sélection réalisée.

Remarquons que l'enregistrement d'une trace cosmique est fort différent de celui intervenant pour les photons EUV solaires. Les pixels "brûlés" par la déposition d'énergie d'un rayon cosmique présentent des valeurs indépendantes (décorrélées) des valeurs des pixels voisins. A l'inverse, un événement solaire très ponctuel sera enregistré sur l'image avec une certaine résolution propre à l'instrument, et la hauteur d'un pixel sera corrélée à celles des pixels voisins. La limite en résolution et les imperfections de l'instrument d'observation sont en effet modélisées par une fonction, la PSF (*Point Spread Function*). L'enregistrement d'une image correspond alors à la convolution de l'image hypothétique obtenue par un instrument parfait avec cette PSF.

Une analyse de régularité Hölderienne locale de l'image  $I$  (Sec. 3.1.2) permet dès lors de distinguer un trace cosmique d'un événement solaire [ADH02]. L'exposant de Hölder  $h_I$  du premier type d'objet est en effet proche de celui d'une singularité ponctuelle ( $h_I = -2$ ) ou de celui d'une droite ( $h_I = -1$ ). Par contre, un objet solaire, plus régulier vu la corrélation entre pixels introduite par la PSF, possède un exposant de Hölder plus élevé.

Pratiquement, nous calculons la régularité Hölderienne locale de  $I$  de la manière suivante. Etant donné l'ondelette chapeau mexicain présentée à la section 2.3.4, nous fixons premièrement une séquence de  $N_a$  échelles  $\{a_j : j \in \mathbb{Z}[N_a], a_j < a_{j+1}\}$ , où  $a_0 = a_m$ , l'échelle minimale permise par la discrétisation de l'image ( $a_0 \simeq 1.1$ ). Pour chacune de ces échelles, les coefficients en ondelettes  $W_I(\vec{x}_{mn}, a_j)$  sont ensuite calculés.

L'exposant de Hölder local  $h_I$  est alors estimé par

$$\tilde{h}_I(\vec{x}_{mn}) = \max_{j \in [0, N_a - 1[} \frac{\log M_{l, j+1}(\vec{x}_{mn}) - \log M_{l, j}(\vec{x}_{mn})}{\log a_{j+1} - \log a_j}, \quad (5.7)$$

où

$$M_{l, j}(\vec{x}_{mn}) = \max_{(p, q) \in B_l(m, n)} |W_I(\vec{x}_{pq}, a_j)|. \quad (5.8)$$

L'emploi des  $M_{l, j}$  stabilise le comportement de  $h_I$  vis à vis du bruit. En outre, il tient compte de la définition de l'exposant de Hölder d'une singularité (distribution), lequel n'est valable que sur un voisinage de cette dernière (Sec. 3.1.2). La largeur  $l$  sera par la suite fixée à 1, donnant lieu à des  $B_l$  de taille  $3 \times 3$ .

Grâce à la détermination de  $\tilde{h}_I$ , nous redéfinissons l'ensemble  $\Sigma_{\kappa_0}(I)$  par

$$\Sigma_{\kappa}(I) = \{ \vec{x}_{mn} : (I(\vec{x}_{mn}) - I_e(\vec{x}_{mn})) \geq \kappa(\tilde{h}_I(\vec{x}_{mn})) \sigma_e(\vec{x}_{mn}), \tilde{h}_I(\vec{x}_{mn}) < 0 \}, \quad (5.9)$$

où le niveau de seuillage  $\kappa$  est maintenant fonction de la régularité détectée.

Si des objets solaires possèdent une régularité négative malgré la corrélation entre pixels introduite par la PSF, nous pouvons raisonnablement penser que ces objets sont d'autant plus nombreux qu'ils sont réguliers. Par conséquent, le seuillage réalisé dans la définition

de  $\Sigma_\kappa(I)$  doit être plus important pour les  $\tilde{h}_I < 0$  se rapprochant de 0. Nous choisissons par conséquent

$$\kappa(u) = \frac{2}{|u|} \kappa_p, \quad (5.10)$$

où  $\kappa_p \in \mathbb{R}$  est le niveau de seuillage des singularités ponctuelles ( $u = -2$ ).

Après la détermination de  $\Sigma_\kappa(I)$ , il est possible d'épurer l'image  $I$  de ces traces cosmiques en définissant

$$\tilde{I}(\vec{x}_{mn}) = \begin{cases} [\mathcal{M}_L I](\vec{x}_{mn}), & \text{si } \vec{x}_{mn} \in \Sigma_\kappa(I), \\ I(\vec{x}_{mn}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Le processus peut également être itéré afin de supprimer les traces cosmiques partiellement gommées lors du passage de  $I$  à  $\tilde{I}$ . Autrement dit, en posant  $I^{(0)} = I$ , nous définissons la récurrence

$$I^{(k+1)}(\vec{x}_{mn}) = \begin{cases} [\mathcal{M}_L I^{(k)}](\vec{x}_{mn}), & \text{si } \vec{x}_{mn} \in \Sigma_\kappa(I^{(k)}), \\ I^{(k)}(\vec{x}_{mn}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.12)$$

### 5.4.2 Résultats $\square$

Les techniques précédentes ont été appliquées à une image EIT FF/FR de 284 Å enregistrée le 27 décembre 1999, soit à un peu plus d'un an du maximum du cycle solaire 23 (Tab. 5.1). Dans cette longueur d'onde, le parasitage cosmique est clairement visible (Fig. 5.5(a) et Fig. 5.5(b)).

Pour nos calculs, nous avons fixé  $L = 2$  lors du filtrage median de  $I$ , avec un niveau de seuillage  $\kappa_p = 2$ . L'exposant de Hölder local  $\tilde{h}_I$  a été évalué à l'aide de 5 échelles sélectionnées logarithmiquement entre  $a_0 = 1.1$  et  $a_4 = 2$ .

Le résultat de la détection, c.-à-d. l'ensemble  $\Sigma_\kappa(I)$ , est affiché sur la Figure 5.5(c) en correspondance avec le zoom de la Figure 5.5(b). L'image reconstruite est donnée à la Figure 5.5(d). La plupart des traces cosmiques les plus singulières y sont clairement nettoyées.

Le  $\sigma$ -seuillage classique ( $\kappa_0 = 2$ ) est comparé avec les points de  $\Sigma_\kappa(I)$  ( $\kappa_p = 2$ ) à la Figure 5.6 sur un zoom de l'image précédente. Celui-ci présente des regains d'intensité lumineuse associés à la dynamique des zones actives (AR). Sur la Figure 5.6(b), les points noirs sont détectés par les deux méthodes, tandis que les points gris sont sélectionnés uniquement par le seuillage classique. Cette figure montre clairement que les objets solaires retenus par cette méthode sont supprimés avec l'analyse de régularité.

En itérant le processus, le nombre de points appartenant à  $\Sigma_\kappa(I^{(k)})$  décroît rapidement avec  $k$  : de 948 points en  $k = 1$ , seul un point subsiste pour  $k = 4$ . La Figure 5.7 présente l'évolution de  $I^{(k)}$  sur une partie de l'image originale. Un trait cosmique d'une dizaine de pixels est présent au milieu de la Figure 5.7(a). Pour  $k = 3$ , la Figure 5.7(c) montre que ce trait a quasiment disparu par rapport à la première itération (Fig. 5.7(b)).

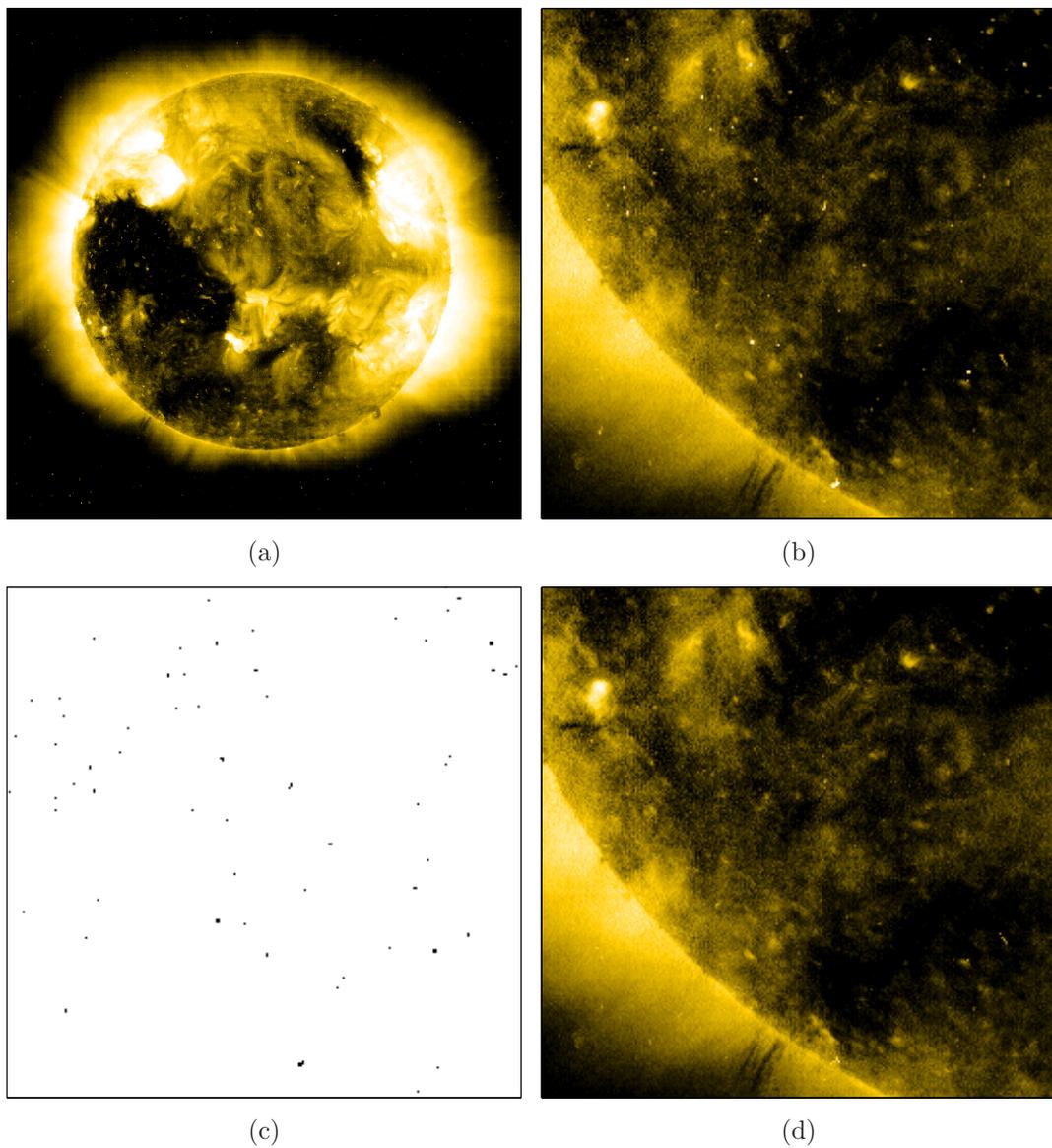


FIG. 5.5 – Détection et suppression de traces cosmiques sur une image EIT 284 Å. (a) Image originale. Les contrastes ont volontairement été augmentés avec une égalisation d'histogramme. (b) Zoom sur cette image. (c) Traces cosmiques détectées. En noir, les points de  $\Sigma_{\kappa}(I)$  pour  $\kappa_p = 2$ . (d) Image nettoyée.

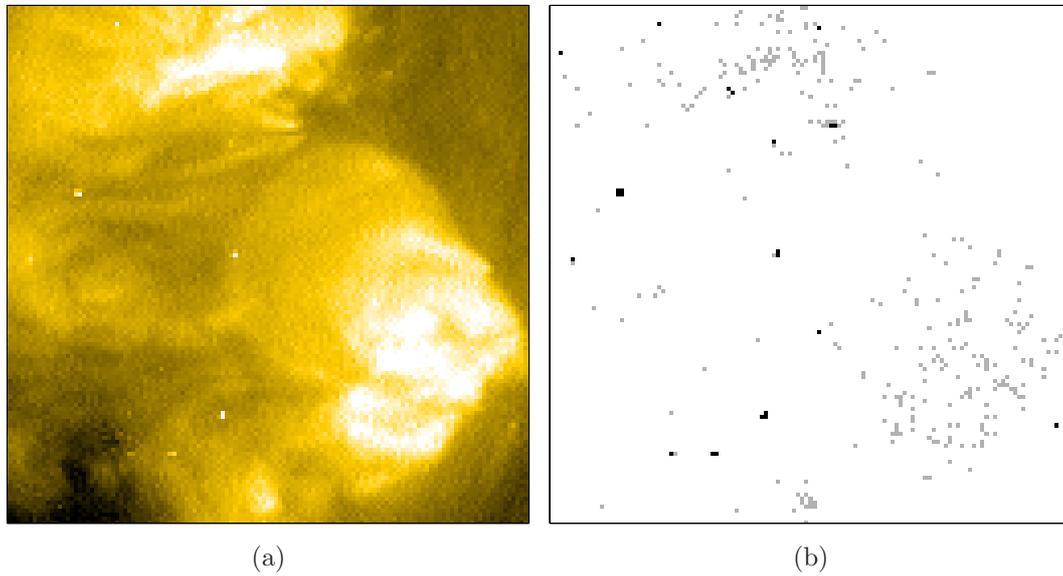


FIG. 5.6 – Comparaison entre un  $\sigma$ -seuillage classique et  $\Sigma_{\kappa}(I)$ . (a) Zoom sur l'image originale. (b) Les points gris et noirs sont détectés par un  $\sigma$ -seuillage classique ( $\kappa_0 = 2$ ). Les points noirs appartiennent à  $\Sigma_{\kappa}(I)$  avec  $\kappa_p = 2$ .

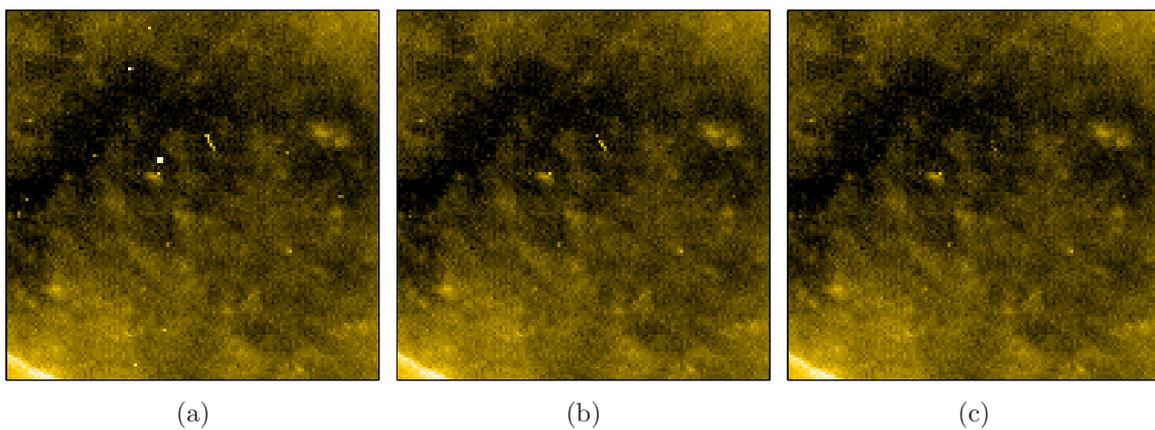


FIG. 5.7 – Nettoyage de traces cosmiques sur plusieurs itérations. (a) Image originale. (b) Résultat après 1 itération. (c) Résultat après 3 itérations.

## 5.5 Détection de Points Brillants $\square$

Parmi les objets caractéristiques apparaissant sur les images de la couronne solaire enregistrées par l'instrument EIT, existent les *points brillants*, ou BPs. Comme mentionné à la section 5.3.5, ceux-ci sont associés à une augmentation locale du flux lumineux sur la *couronne calme* ou sur les *trous coronaux*.

Les difficultés rencontrées lors de la détection des BPs sont multiples. Premièrement, ces objets reposent sur des fonds lumineux moyens variables. Les BPs de la couronne calme s'élèvent ainsi au dessus d'une intensité moyenne de l'ordre de 75 DN, alors que cette dernière chute sous les 35 DN pour les BPs associés aux trous coronaux.

Deuxièmement, les BPs ont des formes, des intensités et des tailles variables, et présentent, dans la limite de résolution de l'instrument, une structure interne contenant des boucles magnétiques miniatures relativement à celles présentes dans les zones actives [UDM04].

Finalement, les images EIT résultant de l'observation d'objets tridimensionnels, les BPs sont souvent enfouis dans d'autres phénomènes physiques, comme par exemple des grandes boucles magnétiques diffuses de zones actives (AR) avoisinantes (*canopy*).

Un certain nombre de travaux ont déjà été réalisés afin de détecter et de classifier les BPs. Leur statistique d'apparition au cours du cycle solaire a ainsi été étudiée dans [HCV00, HJZ02], tandis que l'évolution temporelle individuelle de ces objets à été analysée entre autre dans [ZKW01, UDM04]. Cependant, bien que donnant des résultats physiques intéressants, les techniques de traitement d'images employées lors de la sélection des BPs sont généralement trop simples (seuillage en intensité, filtrage médian, relevés visuels, ...).

Dans cette section, nous nous inspirons des travaux de Bijaoui sur la détection d'étoiles dans des amas galactiques [BR95, BSR96] pour réaliser la détection et la caractérisation des BPs à l'aide d'un repère semi-continu d'ondelettes isotropes du plan. Nous verrons en particulier comment extraire certains paramètres physiques importants des BPs, comme leur intensité maximum, le fond lumineux sous-jacent, leur taille, ou leur anisotropie, à partir de l'analyse multi-échelle d'une image EIT.

### 5.5.1 Approche continue $\square$

**Problème à un objet.** Modélisons premièrement un BP par une gaussienne centrée sur l'origine de taille  $\tau > 0$  et d'amplitude  $u > 0$  sur un fond constant de hauteur  $h > 0$ , c.-à-d.

$$I(\vec{x}) = h + u \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2\tau^2}\right). \quad (5.13)$$

Si nous calculons les coefficients en ondelettes (en normalisation  $L^1$ ) de cette image avec une ondelette isotrope, le fond  $h$  n'exerce aucune influence sur ceux-ci et nous obtenons

$$W_I(\vec{b}, a) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} I(\vec{x}) \psi_{\vec{b},a}^*(\vec{x}) \quad (5.14)$$

$$= u \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2\tau^2}\right) \frac{1}{a^2} \psi^*\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right). \quad (5.15)$$

Pour l'ondelette DOG (Sec. 2.3.4)

$$\psi(\vec{x}) = g_\alpha(\vec{x}) - g_1(\vec{x}), \quad (5.16)$$

avec  $\alpha > 1$  et  $g_\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \exp -\frac{\vec{x}^2}{2\alpha^2}$ , nous pouvons calculer analytiquement

$$W_I(\vec{b}, a) = u\tau^2 \left( \frac{1}{a^2\alpha^2 + \tau^2} \exp \left( -\frac{\vec{b}^2}{2(a^2\alpha^2 + \tau^2)} \right) - \frac{1}{a^2 + \tau^2} \exp \left( -\frac{\vec{b}^2}{2(a^2 + \tau^2)} \right) \right). \quad (5.17)$$

Il est clair que pour toute échelle  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $W_I$  possède un maximum local en l'origine. En outre, en fixant  $\vec{b} = \vec{0}$ , nous trouvons

$$|W_I(\vec{0}, a)| = u \frac{a^2\tau^2(\alpha^2 - 1)}{(a^2\alpha^2 + \tau^2)(a^2 + \tau^2)}. \quad (5.18)$$

Ceci permet de constater que  $|W_I(\vec{0}, a)|$  a une valeur maximale en  $a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tau$  égale à

$$|W_I(\vec{0}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tau)| = u \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}. \quad (5.19)$$

En réalité, par le principe de covariance sous dilatation (Sec. 2.3.2), quelle que soit l'ondelette isotrope choisie,  $|W_I(\vec{0}, a)|$  affiche toujours un maximum en  $q_\psi\tau$  avec  $q_\psi \in \mathbb{R}_+$  fonction uniquement de l'ondelette. En effet, en supposant que  $\psi$  est une fonction à décroissance rapide<sup>12</sup>,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} |W_I(\vec{0}, a)| &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} I(\vec{x}) \frac{1}{a^2} \psi^*\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \exp\left(-\frac{a^2\vec{x}^2}{\tau^2}\right) \psi^*(\vec{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \psi^*(\vec{x}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} |W_I(\vec{0}, a)| &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{\tau^2}\right) \frac{1}{a^2} \psi^*\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ a \gg \tau}} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{\tau^2}\right) \frac{1}{a^2} [\psi^*(\vec{0}) + O(a^{-1}\vec{x})] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{\tau^2}\right) \psi(\vec{0}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Autrement dit, dans les notations du chapitre 1,  $\psi \in \mathcal{Q}$ .

Dès lors,  $|W_I(\vec{0}, a)| \geq 0$  possède un maximum sur  $\mathbb{R}_+$ . Supposons que ce dernier soit localisé en  $a_\tau$ . Par la covariance sous dilatation de la transformée continue en ondelettes (Sec. 2.3.2),

$$|W_{I_\lambda}(\vec{0}, a)| = \lambda^{-2} |W_I(\vec{0}, \lambda^{-1}a)|, \quad (5.20)$$

avec  $I_\lambda(\vec{x}) = \lambda^{-2}I(\lambda^{-1}\vec{x})$ , l'image d'une gaussienne de taille  $\lambda\tau$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $a_{\lambda\tau} = \lambda a_\tau$ , et  $a_\tau = q_\psi \tau$ , pour une certaine valeur  $q_\psi$  fonction uniquement de la forme de l'ondelette  $\psi$ .

**Problème à  $N$  objets.** Supposons maintenant être en présence de  $N \in \mathbb{N}$  points brillants modélisés par

$$I(\vec{x}) = h + \sum_{k=1}^N u_k \exp -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_k)^2}{2\tau_k^2}, \quad (5.21)$$

où  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^2$  et  $u_k > 0$  sont la position et l'amplitude de chaque BP.

Il est clair que ces gaussiennes interagissent au sein des transformées en ondelettes à mesure que l'échelle  $a$  augmente. Pour tenir compte de cet effet, et plutôt que de rester à la "verticale" de chaque gaussienne, c.-à-d. localisé en  $\vec{x}_k$ , il est préférable de se placer sur les *lignes de maxima* définies comme suit.

**Définition 5.1.** Une courbe  $\{(\vec{b}(a), a) : a \in A \subset \mathbb{R}_+^*\}$  est une ligne de maxima dans l'espace des paramètres  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$  de  $W_I$  si la fonction  $\vec{b} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue sur  $A$  et si, pour chaque  $a \in A$  fixé,  $|W_I(\vec{b}, a)|$  est localement maximum en  $\vec{b}(a)$ .

Cette définition n'est rien d'autre qu'une généralisation bidimensionnelle des lignes de maxima utilisées pour détecter et caractériser les singularités unidimensionnelles [Mal98, MH92, Tor95].

En outre, ces lignes convergent nécessairement vers les positions  $\vec{x}_k$  lorsque  $a$  tend vers 0. En effet, prenons l'ondelette chapeau Mexicain. Celle-ci correspond au laplacien d'une gaussienne (Sec. 2.3.4), c.-à-d.

$$\psi(\vec{x}) = \Delta g_1(\vec{x}) = (2 - \vec{x}^2) \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2}\right). \quad (5.22)$$

Par conséquent, avec cette ondelette,

$$W_I(\vec{b}, a) = (I * \psi_a)(\vec{b}) = a^2 \Delta(I * g_a)(\vec{b}). \quad (5.23)$$

A la limite,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{-2} W_I(\vec{b}, a) = \Delta \lim_{a \rightarrow 0^+} (I * g_a)(\vec{b}) \quad (5.24)$$

$$= \Delta(I * \delta)(\vec{b}) \quad (5.25)$$

$$= \Delta I(\vec{b}), \quad (5.26)$$

où limite et laplacien ont été permutés grâce à la régularité de la convolution. Puisque  $\Delta I$  est maximal aux points de courbures extrêmes, et, a fortiori, au sommet de gaussiennes, il en est de même pour  $W_I$  lorsque  $a$  tend vers 0.

Ce résultat reste valable pour toute ondelette isotrope possédant au moins deux moments nuls. En effet, en supposant  $\hat{\psi} \in C^2$ , puisque  $\hat{\psi}(0) = 0$  et  $\vec{\nabla}\hat{\psi}(0) = 0$ ,

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \|\vec{k}\|^2 \hat{\phi}(0) + O(\|\vec{k}\|^3), \quad (5.27)$$

pour  $\|\vec{k}\| \ll 1$  et avec  $\hat{\phi} = \frac{1}{4}\Delta\hat{\psi}$ . Dès lors,

$$\hat{\psi}_a(\vec{k}) \underset{a\|\vec{k}\| \ll 1}{=} a^2 \|\vec{k}\|^2 \hat{\phi}(0) + O(a^4 \vec{k}^4), \quad (5.28)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{-2} W_I(\vec{b}, a) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \hat{I}(\vec{k}) \hat{\psi}^*(a\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \hat{I}(\vec{k}) (\|\vec{k}\|^2 \hat{\phi}(0) + O(a^2 \vec{k}^4)) e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \hat{\phi}(0) \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \|\vec{k}\|^2 \hat{I}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \\ &= -\hat{\phi}(0) \Delta I(\vec{b}), \end{aligned}$$

en employant (2.59). Par conséquent, lorsque  $a$  tend vers zéro, l'ondelette  $\psi_a$  agit comme l'opérateur laplacien sur  $I$ .

Dès lors, dans le modèle (5.21), pour chaque gaussienne localisée en  $\vec{x}_k$ , nous pouvons associer une ligne de maxima  $r_k = \{(\vec{b}_k(a), a) : a \in A_k \subset \mathbb{R}_+^*\}$  telle que  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \vec{b}_k(a) = \vec{x}_k$ .

Pour fixer les idées, l'ondelette employée dans la suite de cette section sera toujours l'ondelette DOG. Supposons que les positions et les tailles des gaussiennes présentes dans (5.21) soient inconnues. Pour estimer celles-ci sur base de la seule information de  $I$ , nous proposons donc d'appliquer la méthode à un objet sur chaque courbe  $r_k$ .

Autrement dit,  $\tau_k$  sera estimé par  $\tilde{\tau}_k = q_\psi^{-1} a_k = \sqrt{\alpha} a_k$ , où  $a_k$  est un maximum local de

$$\rho_k(a) = |W_I(\vec{b}_k(a), a)|, \quad (5.29)$$

la restriction des coefficients en ondelettes à la  $k^{\text{ème}}$  ligne de maxima.

Pour l'estimation des positions  $\vec{x}_k$  des gaussiennes, deux possibilités existent. Nous pouvons soit estimer celles-ci dans une *approche ponctuelle* en prenant la valeur limite  $\vec{p}_k$  de  $\vec{b}_k(a)$  lorsque  $a$  tend vers zéro, c.-à-d.

$$\vec{p}_k = \lim_{a \rightarrow 0^+} \vec{b}_k(a). \quad (5.30)$$

La même démarche est employée pour la recherche de singularités ponctuelles dans un signal ou une image à partir de lignes de maxima [MH92].

Nous pouvons aussi prendre la position du maximum, c.-à-d.  $\vec{b}_k(a_k)$ . Dans ce cas, la position détectée sera éventuellement à rattacher à un groupement de gaussiennes proches interagissant au gré des échelles. Nous parlerons alors d'*approche ensembliste*.

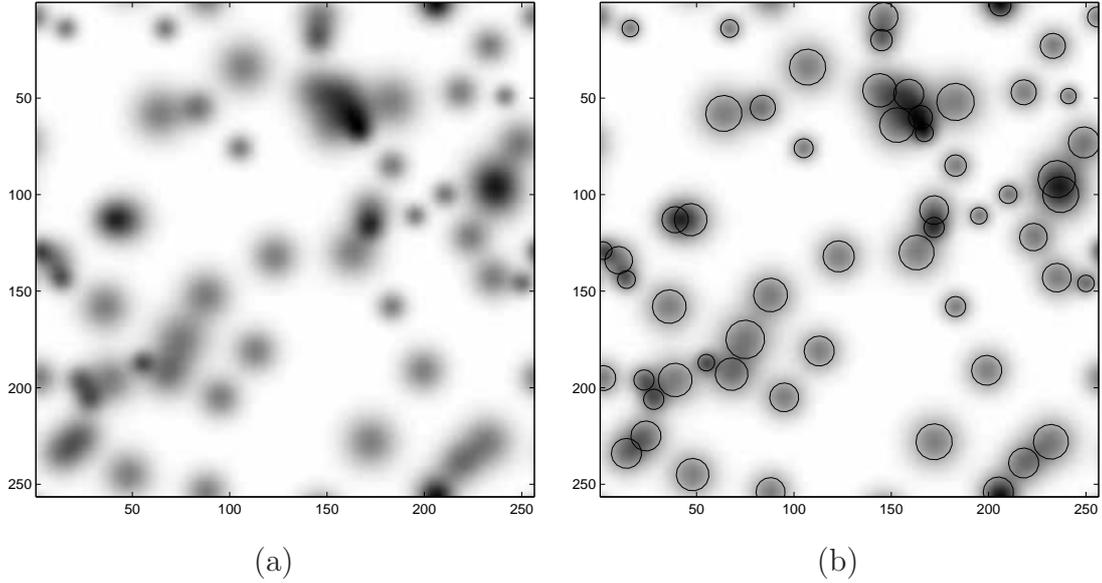


FIG. 5.8 – (a) Répartition aléatoire de gaussiennes de différentes largeurs prises aléatoirement dans l'intervalle  $[4, 10]$ . L'image a une taille  $256 \times 256$  et contient 58 gaussiennes de hauteur  $u = 1$ . La hauteur du fond est  $h = 1$ . (b) La même image avec sur-impression de cercles localisés sur les centres  $\vec{x}_k$  de rayon égal à  $\tau_k$ .

**Test sur une image académique.** Pour tester les méthodes de caractérisation de gaussiennes présentées à la section précédente, nous avons créé une image académique constituée d'une répartition aléatoire de gaussiennes. Celles-ci ont des tailles variables prises dans l'intervalle  $[\tau_m = 4, \tau_M = 10] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Leurs amplitudes  $u_k$  et le fond  $h$  ont été fixés à 1. L'image finale, présentée sur la Figure 5.8, a une taille  $256 \times 256$ .

Nous avons ensuite calculé la transformée continue en ondelette avec l'ondelette DOG ( $\alpha = 1.25$ ) en normalisation  $L^1(\mathbb{R}^2)$  pour une séquence de 64 échelles réparties logarithmiquement dans l'intervalle  $[a_m = 1, a_M = 60]$ , où  $a_m = 1$  est une échelle minimale respectant l'échantillonnage de  $\psi_{a_m}$  sur la grille de l'image (Sec. 2.3.5). Ces valeurs permettent a priori la détection de toutes les gaussiennes puisque  $a_m < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tau_m$  et  $a_M > \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tau_M$ .

Pour chaque échelle  $a$ , les positions  $\vec{b}_k(a)$  des maxima locaux du module  $|W_I(\vec{b}, a)|$  ont été calculées. Cependant, étant intéressé par les lignes de maxima érigées sur les sommets de gaussiennes, seuls les maxima associés à des zones de courbure négative de l'image lorsque  $a$  tend vers 0 ont été conservés. Puisque

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{-2} W_I(\vec{b}, a) = -\hat{\phi}(0) \Delta I(\vec{b}),$$

avec  $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{4}[\Delta \hat{\psi}](0) = \frac{1}{4}(1 - \alpha) < 0$ , les minima de  $W_I(\vec{b}_k(a), a)$  sont ainsi retenus.

Ces positions ont été reliées en ligne de maxima par une recherche de plus proches voisins entre deux échelles consécutives. Le résultat de ce chaînage est présenté à la Figure 5.9 sur une autre image académique contenant moins de gaussiennes.

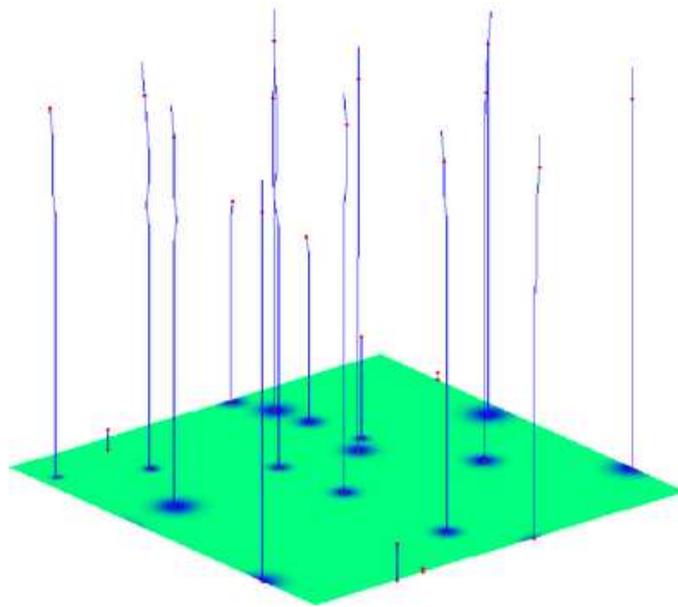


FIG. 5.9 – Formation de lignes de maxima.

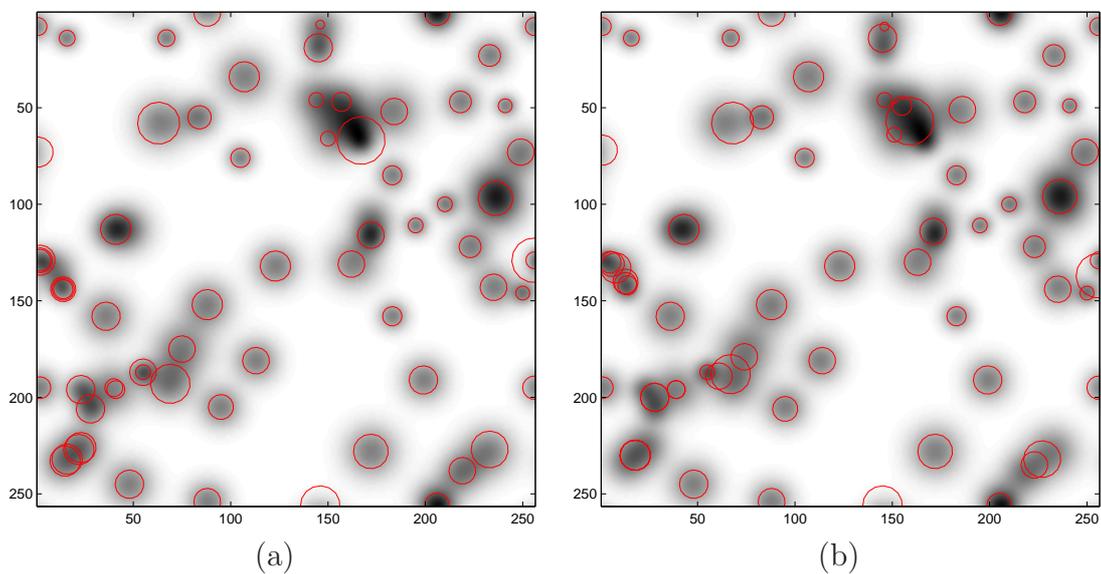


FIG. 5.10 – Détection des gaussiennes avec une ondelette DOG. (a) Les cercles sont centrés sur les  $\vec{p}_k$  (approche ponctuelle) et ont pour rayon  $\tilde{\tau}_k$ . (b) La même image avec des cercles localisés sur  $\vec{b}_k(a_k)$  (approche ensembliste).

Finalement, pour chaque  $k$ , les quantités  $\vec{p}_k$ ,  $a_k$  et  $\vec{b}_k(a_k)$  ont été évaluées.

Le résultat de la détection est présenté sur la Figure 5.10. L'approche ponctuelle apparaît sur l'image de gauche où chaque cercle est centré sur  $\vec{p}_k$  avec un rayon égal à  $\tilde{\tau}_k$ . Dans l'image de droite, l'approche ensembliste présente les mêmes cercles centrés sur les  $\vec{b}_k(a_k)$ .

La détection est plus efficace pour les gaussiennes isolées. Cependant, lorsque plusieurs d'entre elles s'associent, la méthode ensembliste ne détecte qu'une seule gaussienne dont la taille reflète l'étendue de l'amas ainsi formé.

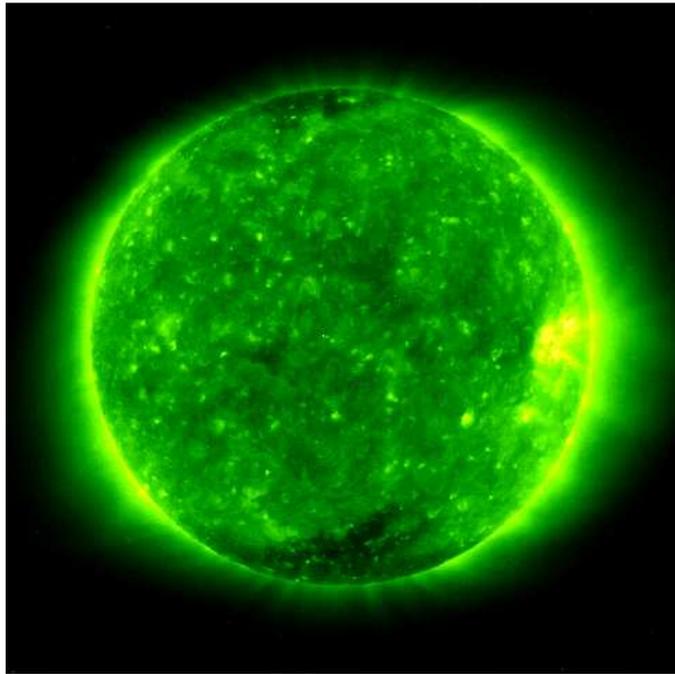


FIG. 5.11 – Image 195 Å du 27/01/1996 en représentation logarithmique.

**Analyse d'une image EIT :** Nous avons sélectionné une image EIT de 195 Å enregistrée le 27 janvier 1996<sup>13</sup>, soit au début du cycle solaire 23 (Fig. 5.11).

Cette image est caractérisée par un nombre relativement faible de zones actives. Les trous coronaires sont essentiellement concentrés aux pôles et le restant du disque solaire est en couronne calme. Les BPs sont par conséquent bien apparents.

Comme précédemment, nous avons calculé les lignes de maxima de l'image pour l'ondelette DOG ( $\alpha = 1.25$ ).

Dans la mesure où un BP est globalement défini comme un objet de taille inférieure à 60'' sur le disque solaire [ZKW01], soit approximativement un diamètre de 23 pixels, nous avons, d'une part, sélectionné 64 échelles prises logarithmiquement entre  $a_m = 1$  et  $a_M = 15$ , cette dernière échelle étant supérieure au rayon  $\frac{1}{2} \frac{23}{\sqrt{\alpha}}$ , et d'autre part, restreint les BPs détectés à ceux tels que  $2\tilde{\tau}_k < 23$ .

<sup>13</sup>Nom de code *eit\_l1\_19960127\_193554*.

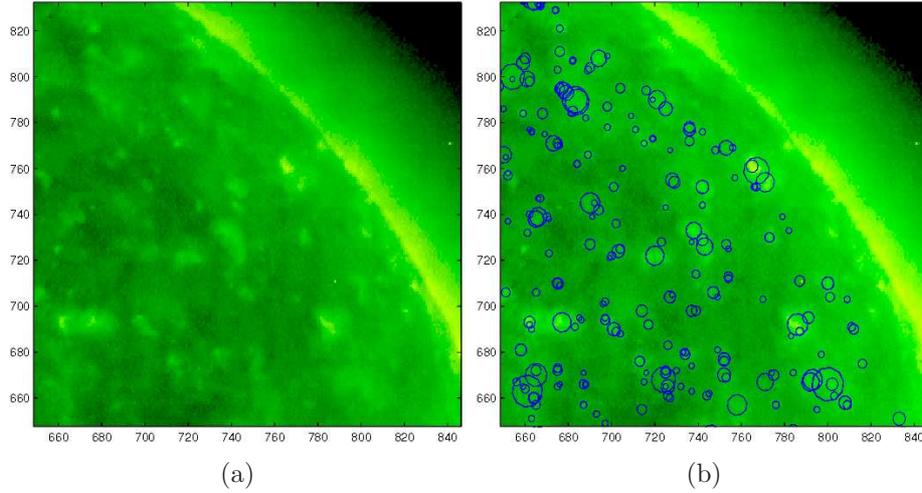


FIG. 5.12 – Détection des BPs sur base des lignes de maxima. (a) Zoom sur l'image de la Figure 5.11. (b) Résultat de la détection (méthode ensembliste).

En outre, afin de tenir compte du bruit inhérent à l'image, nous avons travaillé sur des coefficients en ondelettes seuillés à chaque échelle. Autrement dit, les lignes de maxima ont été calculées sur les coefficients

$$\tilde{W}_I = \mathcal{T}[a^{-1} k \sigma_e \|\psi\|] \cdot W_I, \quad (5.31)$$

où  $T$  est l'opérateur de seuillage défini en (4.75),  $\sigma_e$  est l'estimation du niveau de bruit donnée en (5.5) et  $k$  est un niveau de seuillage fixé à 3.

Ce seuillage suppose que la déviation standard  $\sigma(\vec{b}, a)$  du bruit présent dans les coefficients  $W_I$  suit approximativement la règle

$$\sigma(\vec{b}, a) \simeq \sigma_e(\vec{b}) \|\psi_{\vec{b}, a}\| = a^{-1} \sigma_e(\vec{b}) \|\psi\|. \quad (5.32)$$

Autrement dit, le bruit de l'image  $I$  est localement stationnaire et  $\sigma_e$  varie peu sur le support des ondelettes  $\psi_a$ . Evidemment, cette hypothèse est de moins en moins vérifiée à mesure que l'échelle augmente. Elle permet néanmoins de supprimer un nombre important de lignes de maxima associées au bruit.

La Figure 5.12 présente le résultat de la détection des candidats BPs sur une partie de la couronne calme par la méthode ensembliste. Chaque cercle est ainsi situé sur un  $\vec{b}_k(a_k)$  avec un rayon égal à  $\tilde{\tau}_k$ .

Dans l'ensemble, les objets associés à une augmentation locale du flux lumineux sont détectés. La taille des cercles tracés sur la Figure 5.12, c.-à-d. l'estimation des  $\tau_k$ , est en bonne correspondance avec la taille réelle des objets ou des groupements d'objets sous-jacents.

### 5.5.2 Approche discrète $\square$

L'approche continue de la détection des BPs décrite à la section précédente présente de plusieurs défauts :

- Il paraît difficile d'obtenir le niveau lumineux sur lequel repose un BP à partir des lignes de maxima. Les coefficients  $W_I$  sont en effet peu sensibles à cette intensité de fond dans la mesure où celle-ci varie faiblement sur le support des ondelettes associées à la ligne de maxima.
- Ce niveau lumineux étant inconnu, il n'est pas possible non plus d'obtenir l'intensité maximale d'un objet détecté relativement à ce fond.
- La taille des objets détectés n'est qu'une mesure moyenne de leur étendue qui ne reflète pas leur éventuelle anisotropie.
- L'approche continue ne permet par l'extraction et la reconstruction d'un ou plusieurs BPs

Pour combler ces lacunes, nous adoptons une approche discrète du problème. En clair, et en se basant sur une démarche de A. Bijaoui pour la détection d'étoiles dans des amas de galaxies [BR95, BSR96], nous prenons un repère linéaire d'ondelettes isotropes avec lequel nous étendons la notion de lignes de maxima vue précédemment.

**Tubes de maxima, Arbres et Objets :** Soit une image  $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$  résultat du bruitage d'une image pure  $I_p$ , c.-à-d.

$$I(\vec{x}) = I_p(\vec{x}) + \sigma\epsilon(\vec{x}), \quad (5.33)$$

pour un niveau de bruit  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ , et avec  $\epsilon(\vec{x}) \sim N(0, 1)$ .

Décomposons cette image  $I$  dans un repère semi-continu, linéaire et isotrope, auquel correspondent les ondelettes réelles

$$\{\psi_{\vec{b},j} = a_j^{-2} \psi(a_j^{-1}(\vec{x} - \vec{b})) : \vec{b} \in \mathbb{R}^2, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (5.34)$$

avec  $a_j = a_0 2^{-j/K}$ , la discrétisation dyadique à  $K \in \mathbb{N}$  voix.

Les coefficients en ondelettes  $W_j(\vec{b}) = \langle \psi_{\vec{b},j} | I \rangle$  étant contaminés par le bruit  $\sigma\epsilon$ , nous travaillons sur les coefficients seuillés

$$\tilde{W}_j(\vec{b}) = \mathcal{T}[a_j^{-1} k \sigma \|\psi\|] \cdot W_j(\vec{b}), \quad (5.35)$$

où  $T$  est défini en (4.75).

Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , l'action de  $T$  implique que le support de  $\tilde{W}_j(\vec{b})$  est composé d'un ensemble de  $N_j \in \mathbb{N}$  zones  $D(j, n) \subset \mathbb{R}^2$  disjointes indicées par  $n \in \mathbb{Z}[N_j]$ . Autrement dit,

$$\text{supp}(\tilde{W}_j(\vec{b})) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}[N_j]} D(j, n). \quad (5.36)$$

Pour chaque zone  $D(j, n)$ , un centre  $\vec{c}_{j,n}$ , une valeur  $v_{j,n}$  et un signe  $s_{j,n}$  peuvent également être définis :

$$\vec{c}_{j,n} = \operatorname{argmax}_{\vec{b} \in D(j,n)} |W_j(\vec{b})|, \quad (5.37)$$

$$v_{j,n} = |W_j(\vec{c}_{j,n})|, \quad (5.38)$$

$$s_{j,n} = \operatorname{sign} W_j(\vec{c}_{j,n}). \quad (5.39)$$

Muni de ces définitions, un lien peut être créé entre des zones  $D(j, n)$  de résolutions différentes.

**Définition 5.2.** Une zone  $D(j, n)$  est attribuée à la zone  $D(j-1, m)$ , ce qui se note

$$D(j, n) \rightsquigarrow D(j-1, m), \quad (5.40)$$

pour un certain  $m \in \mathbb{Z}[N_{j-1}]$ , si

$$\begin{cases} \vec{c}_{j,n} \in D(j-1, m), \\ s_{j,n} = s_{j-1,m} \end{cases} \quad (5.41)$$

Ce chaînage s'étend sans peine à des résolutions non contiguës.

**Définition 5.3.** Une zone  $D(j, n)$  est attribuée à la zone  $D(k, m)$ , avec  $k \leq j$  et  $m \in \mathbb{Z}[N_k]$ , s'il existe une séquence  $\{n_r\}_{0 \leq r \leq j-k}$  telle que

$$n_r \in \mathbb{Z}[N_{j-r}], \quad n_0 = n, \quad n_{j-k} = m, \quad (5.42)$$

et pour laquelle

$$D(j-r, n_r) \rightsquigarrow D(j-r-1, n_{r+1}), \quad (5.43)$$

pour tout  $0 \leq r < j-k$ .

Remarquons que cette dernière définition est semblable à la notion de ligne de maxima vue à la section précédente. En fait, le chaînage (5.43) associant deux zones  $D(j, n)$  et  $D(k, m)$  forme dans l'espace des coefficients en ondelettes ce que nous nommerons des *tubes de maxima*.

Sous une zone  $D(j, n)$ , ces tubes se combinent pour former des *arbres* définis comme suit.

**Définition 5.4.** Un arbre  $T(j, n)$  est constitué de l'ensemble des zones attribuées à la zone  $D(j, n)$ . Autrement dit,

$$T(j, n) = \{D(k, m) : k > j, m \in \mathbb{Z}[N_k], D(k, m) \rightsquigarrow D(j, n)\} \cup D(j, n). \quad (5.44)$$

$D(j, n)$  correspond à la racine de l'arbre  $T(j, n)$ .

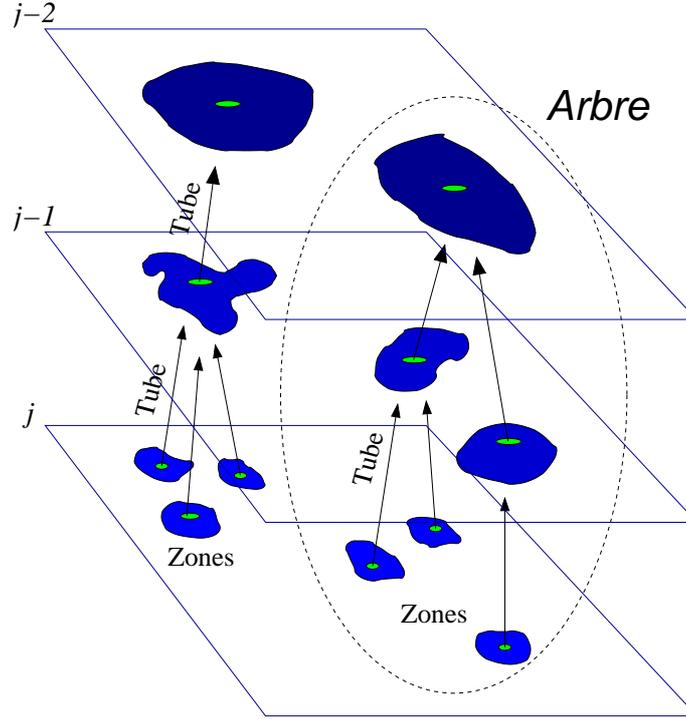


FIG. 5.13 – Formation des zones, des tubes de maxima et des arbres dans l'espace multi-échelle

Un arbre  $T(j, n)$  peut également s'écrire comme

$$T(j, n) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} D^s(j, n), \quad (5.45)$$

avec

$$D^s(j, k) = \{D(j + s, n) : n \in \mathbb{Z}[N_{j+s}], D(j + s, n) \rightsquigarrow D(j, k)\}, \quad (5.46)$$

pour  $s \in \mathbb{N}^0$ , et en posant  $D^0(j, k) = D(j, k)$ .

La Figure 5.13 schématise la formation des zones, des tubes de maxima et des arbres dans l'espace multi-échelle.

Pour rappel, la section précédente a permis d'observer que les maxima le long des lignes de maxima de coefficients en ondelettes, caractérisent les gaussiennes dont ces lignes sont issues.

Reprenant ce point de vue, nous définissons le concept d'*objet* de la manière suivante.

**Définition 5.5.** Un objet  $O$  est un arbre  $T(j, n)$  dont la racine  $D(j, n)$  est telle que,

$$v_{j,n} > v_{j-1,n_-} \quad \text{pour } n_- \in \mathbb{Z}[N_{j-1}] : D(j, n) \rightsquigarrow D(j-1, n_-) \quad (5.47)$$

$$v_{j,n} > v_{j+1,n_+}, \quad \forall n_+ \in \mathbb{Z}[N_{j+1}] : D(j+1, n_+) \rightsquigarrow D(j, n). \quad (5.48)$$

avec  $v_{j-1,n_-} = 0$  si  $n_-$  n'existe pas, et  $v_{j+1,n_+} = 0$  si  $D^1(j, n) = \emptyset$ .

Soit  $\{O_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des objets d'une image  $I$ , et soit  $D(j_p, n_p) \subset \mathbb{R}^2$  la zone racine de l'objet  $O_p$  avec  $j_p \in \mathbb{Z}$  et  $n_p \in \mathbb{Z}[N_{j_p}]$ .

A l'aide de la formule de reconstruction propre au repère linéaire (Sec. 4.3.1), nous définissons la reconstruction spatiale  $o_p(\vec{x})$  de l'objet  $O_p$  par la reconstruction de l'image  $I$  restreinte aux zones de  $O_p$ , c.-à-d.

$$o_p(\vec{x}) = \sum_{s \in \mathbb{N}} W_{j_p+s}(\vec{x}) \mathbb{1}_{D^s(j_p, n_p)}(\vec{x}), \quad (5.49)$$

où, si  $F = \bigcup_k E_k$  est une union d'ensembles  $E_k \subset \mathbb{R}^2$  disjoints,  $\mathbb{1}_F(\vec{x}) = \sum_k \mathbb{1}_{E_k}(\vec{x})$ .

De la même manière, la reconstruction de l'image  $I$  sans l'objet  $O_p$  est définie par

$$[I/o_p](\vec{x}) = \sum_{j=-\infty}^{j_p-1} W_j(\vec{x}) + \sum_{s \in \mathbb{N}} W_{j_p+s}(\vec{x}) \mathbb{1}_{\mathcal{C}D^s(j_p, n_p)}(\vec{x}) = I(\vec{x}) - o_p(\vec{x}), \quad (5.50)$$

où  $\mathcal{C}E = \mathbb{R}^2/E$  est le complémentaire de l'ensemble  $E$ .

*Remarque 5.1.* En toute rigueur, il faudrait normalement reconstruire  $o_p$  de la manière suivante

$$o'_p(\vec{x}) = \sum_{s \in \mathbb{N}} [W_{j_p+s} * \tilde{\psi}_{j_p+s}](\vec{x}) \mathbb{1}_{D^s(j_p, n_p)}(\vec{x}), \quad (5.51)$$

pour une certaine ondelette duale  $\tilde{\psi}$  associée à  $\psi$  et à la restriction de la reconstruction aux espaces  $D^s(j_p, n_p)$ . Cette ondelette peut s'obtenir de manière itérative en employant, par exemple, l'algorithme du *gradient conjugué* décrit à la section 4.1.3. Cette approche a pour effet de minimiser l'erreur  $\|I - o'_p\|$ . Vu la simplicité d'implémentation de (5.50), nous supposons toutefois que  $o_p$  est une bonne approximation de  $o'_p$ , autrement dit, que l'ondelette duale est proche de la distribution de Dirac.

*Remarque 5.2.* En pratique, et comme mentionné à la section 4.3.2, l'image  $I$  étant finie et discrétisée, les résolutions  $j$  sont négatives et limitées inférieurement par la résolution  $-J$  ( $J \in \mathbb{N}$ ) d'une fonction d'échelle  $\zeta_{-J}$  définie en (4.58). L'objet  $O_p$  sera par conséquent reconstruit à l'aide de

$$o_p(\vec{x}) = \sum_{s=1-J-j_p}^{1-j_p} W_{j_p+s}(\vec{x}) \mathbb{1}_{D^s(j_p, n_p)}(\vec{x}), \quad (5.52)$$

en posant  $W_1(\vec{x}) = H(\vec{x}) = \langle \eta | I \rangle$ , où  $\eta$  est la fonction *résiduelle* de  $\psi$  définie en (4.64).

**Analyse d'une image académique :** Soit une répartition aléatoire de 20 gaussiennes donnée par

$$I(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{10} \exp -\frac{(\vec{x}-\vec{u}_k)^2}{2\tau_A^2} + \sum_{k=1}^{10} \exp -\frac{(\vec{x}-\vec{v}_k)^2}{2\tau_B^2}, \quad (5.53)$$

avec  $\tau_A = 5$  et  $\tau_B = 10$ , dont une réalisation est présentée à la Figure 5.14(a).

Il est possible d'isoler la population de gaussiennes de taille  $\tau_A$  en décomposant  $I$  en ses objets constitutifs.

Pour ce faire, nous analysons  $I$  avec une variante à  $K \in \mathbb{N}$  voix du repère ASF présenté à la section 4.4.6 dans sa version isotrope, c.-à-d. pour  $N = 2^0 = 1$  orientation. L'ondelette  $\psi$  y est définie par

$$\hat{\psi}(\vec{k}) = \phi(K \log_2 k), \quad (5.54)$$

avec  $k = \|\vec{k}\|$ , et où  $\phi(t) = \beta_2(t)$  est une fonction *spline* quadratique définie en (B.47).

Pour une discrétisation dyadique  $a_j = a_0 2^{-j/K}$  avec  $a_0 = \pi^{-1} 2^{\frac{3}{2K}}$ , l'ondelette  $\hat{\psi}_1$  est contenue dans l'anneau  $\pi 2^{-3/K} \leq k \leq \pi$ , et la partition de l'unité réalisée par  $\beta_2$  garantit la relation de linéarité (4.54) du repère  $\{\psi_{\vec{b},j}\}$ .

Muni de ces fonctions, l'image  $I$  est décomposée selon  $J = 4$  échelles pour  $K = 2$  voix. Puisque l'image  $I$  est dépourvue de bruit, nous prenons  $\sigma = 0$  lors de la réalisation des zones  $D(j, n)$ . Ces dernières sont dans ce cas enfermées dans les courbes de passage à zéro de  $W_j(\vec{b})$ .

Les objets décrits au paragraphe précédent sont ensuite répertoriés après avoir calculé tous les tubes de maxima résultat du chaînage des  $D(j, n)$ .

Pour chaque objet  $O_p$  détecté, le centre  $\vec{\mu}_p$  et la taille  $\tau_p$  de celui-ci sont estimés à l'aide de

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{\|O_p\|_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \vec{x} |O_p(\vec{x})|, \quad (5.55)$$

$$\tau_p^2 = \frac{1}{2\|O_p\|_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} \|\vec{x} - \vec{\mu}_p\|^2 |O_p(\vec{x})|. \quad (5.56)$$

La Figure 5.14(b) présente le résultat de la sélection des gaussiennes de taille  $\tau_A$  en reconstruisant une image ne contenant que les objets  $O_p$  de taille  $\tau_p \leq 7$ . La taille des 13 objets ainsi détectés est assez variable :  $\tau_p \in [2.6881, 6.1966]$  pour une moyenne de  $3.2504 < \tau_A$ . La variabilité s'explique par l'influence des interactions entre gaussiennes. L'infériorité de la valeur moyenne par rapport à  $\tau_A$  provient elle de la formation des objets. La racine d'un objet est en effet localisée sur un maximum dans un tube de maxima. La terminaison de ce tube vers les résolutions inférieures est ainsi éliminée, ce qui induit une sous-estimation systématique de la taille réelle de l'objet.

Si nous ajoutons un bruit blanc gaussien à l'image précédente, la méthode continue de fonctionner. La Figure 5.15(a) affiche ainsi l'image bruitée ( $\sigma = 0.2$ , PSNR=22.43 dB).

La sélection des gaussiennes de taille  $\tau_A$  a été réalisée en prenant  $k = 2.5$  dans le seuillage (5.35), et en ne retenant que les objets de taille  $\tau_p \in [1, 7]$ . Le résultat est affiché sur la Figure 5.14(b). La valeur inférieure de cet intervalle de tailles tend à limiter la détection de faux objets résiduels issus du bruit.

**Extraction de BPs dans une image EIT :** Nous allons maintenant employer la décomposition d'une image en ses objets constitutifs afin de détecter et extraire les points brillants de la couronne solaire calme dans les images EIT. Ces images seront traitées dans

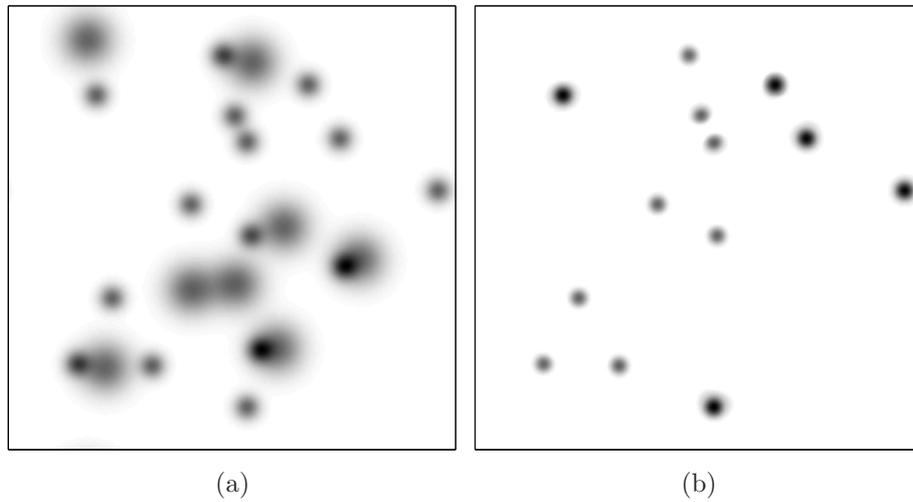


FIG. 5.14 – (a) Assemblage de gaussiennes de tailles  $\tau_A = 5$  et  $\tau_B = 10$ . (b) Extraction des gaussiennes de taille  $\tau_A$ .

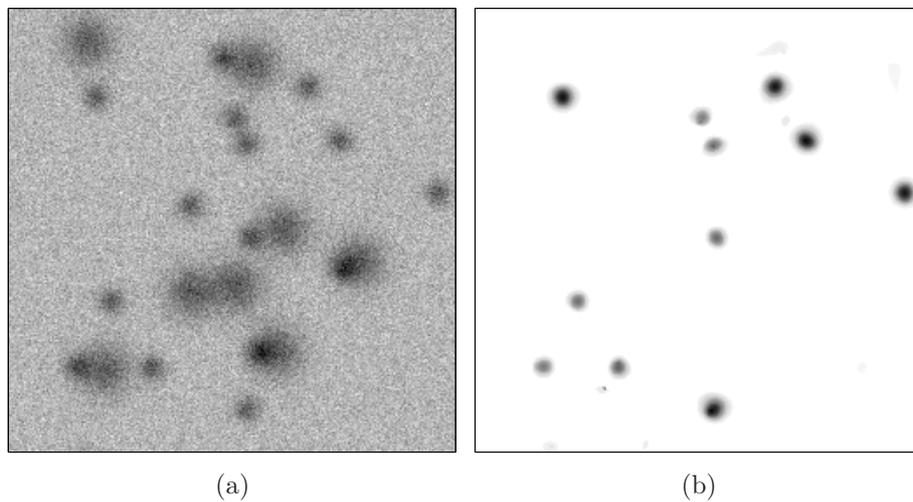


FIG. 5.15 – (a) Assemblage de gaussiennes de tailles  $\tau_A = 5$  et  $\tau_2 = 10$  bruité par un bruit blanc gaussien (PSNR=22.43 dB). (b) Extraction des gaussiennes de taille  $\tau_A$ .

leur représentation directe, et non en représentation logarithmique, afin de lier facilement les caractéristiques des objets détectés à d'éventuelles quantités physiques importantes (intensité lumineuse, nombre de photons EUV détectés, ...).

L'image EIT analysée est une image de 195 Å, enregistrée le 22 décembre 1996 en début de cycle solaire<sup>14</sup> (Fig. 5.16(a)). Cette observation est caractérisée par une couronne calme très étendue vu la rareté de zone active (AR) en début de cycle.

Comme pour l'image académique précédente, l'image  $I$  est décomposée dans un repère ASF, avec maintenant  $J = 6$  échelles et  $K = 1$  voix. En première approximation, le bruit est supposé globalement stationnaire et sa déviation standard est estimée à  $\sigma = 2.78$  DN par la méthode RME (Sec. 4.3.4). Les zones, les arbres et finalement les objets de  $I$  sont ensuite calculés sur base de ces derniers paramètres et pour  $k = 2.5$ .

Soit  $O_p$  le  $p^{\text{ème}}$  objet détecté. En plus de son centre  $\vec{\mu}_p$  et de sa taille  $\tau_p$  définis en (5.55) et (5.56), nous introduisons également les quantités suivantes :

- l'intensité maximale  $i_p$  :

$$i_p = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^2} o_p(\vec{x}); \quad (5.57)$$

- le niveau ambiant  $b_p$ , donné par le niveau lumineux moyen du fond sur lequel repose l'objet, c.-à-d.

$$b_p = |\text{supp}(o_p)|^{-1} \int_{\text{supp}(o_p)} d^2\vec{x} (I(\vec{x}) - o_p(\vec{x})), \quad (5.58)$$

où  $|A|$  est la mesure  $\int_A d^2\vec{x}$  de l'ensemble  $A$ ;

- le demi grand axe  $\tau_p^+$  et le demi petit axe  $\tau_p^-$  de l'objet pris comme une distribution elliptique, c.-à-d.

$$(\tau_p^+)^2 = \max(\tau_+^2, \tau_-^2), \quad (5.59)$$

$$(\tau_p^-)^2 = \min(\tau_+^2, \tau_-^2), \quad (5.60)$$

avec

$$\tau_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2) \pm \frac{1}{2}(\tau_{xx}^2 - \tau_{yy}^2) \pm \frac{1}{2} \cos(2\theta) \tau_{xy}^2, \quad (5.61)$$

$$\tau_{uv}^2 = \|o_p\|_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} (u - \mu_u)(v - \mu_v) |o_p(\vec{x})|, \quad (5.62)$$

$$2\theta = \arctan \frac{2\tau_{xy}^2}{\tau_{xx}^2 - \tau_{yy}^2} \quad (5.63)$$

avec  $u, v \in \{x, y\}$  et  $\vec{\mu}_p = (\mu_x, \mu_y)$ ;

---

<sup>14</sup>Nom de code : 19961222.193945

- l'*anisotropie*  $\kappa_p = \frac{\tau_p^+}{\tau_p^-}$ , égale à 1 si l'objet est isotrope ;
- le *diamètre moyen*  $d_p$ , le *diamètre maximal*  $d_p^+$  et le *diamètre minimal*  $d_p^-$  de l'objet  $O_p$ , définis respectivement par  $\tau_p$ ,  $2\tau_p^+$  et  $2\tau_p^-$ .

Les Figures 5.16(b) et 5.17(b) présentent la reconstruction de l'ensemble des objets  $O_p$  de l'image  $I$  tels que :

- (i)  $b_p \in [35 \text{ DN}, 150 \text{ DN}]$ , conservant les objets de la couronne calme [HCV00] ;
- (ii)  $d_p^+ < 25 \text{ px}$ , ce qui sélectionne les candidats BPs supposés de taille maximale inférieur à 25 px [ZKW01].

Grâce à ces deux règles, nous constatons que

1. la zone active située sur le haut de l'image de la Figure 5.16(b) ainsi que le trou coronal localisé en bas sont clairement éliminés des zones d'apparition de BPs ;
2. des éléments assez faibles dans l'image originale sont nettement mis en évidence dans la reconstruction des objets sélectionnés.

Afin d'épurer un peu plus la reconstruction finale, nous décidons arbitrairement d'éliminer les objets trop anisotropes. Ceci se fait très facilement en supprimant par exemple les objets tels que  $\kappa_p > 2$ . Le résultat de cette démarche est affiché sur la Figure 5.17(c). Seuls les BPs les plus nets et les plus localisés ont survécu.

Finalement, pour souligner la capacité de la méthode à isoler un objet indépendamment de son environnement, la Figure 5.18 présente la reconstruction d'un seul BP (Fig. 5.18(b)) sélectionné sur une autre partie de l'image EIT précédente (Fig. 5.18(a)). La structure interne de ce dernier présente deux zones, vraisemblablement de polarités magnétiques différentes, dont la proximité les fait appartenir à une seul objet pour la gamme d'échelles sélectionnées.

## 5.6 Conclusions et perspectives

Nous avons appliqué l'analyse en ondelettes à deux problèmes précis de traitement d'images solaires : la détection et la suppression de traces cosmiques, ainsi que la localisation des BPs de la couronne solaire.

Dans ce dernier cas, la notion de *tubes de maxima* héritée des *lignes de maxima* de la CWT a permis la décomposition d'une image en ses objets constitutifs, lesquels peuvent alors être étudiés et caractérisés séparément. La mesure précise de certains paramètres physiques étant dès lors possible, la sélection des BPs a été facilitée.

Cette méthode ouvre la voie vers de nouvelles analyses systématiques des images EIT.

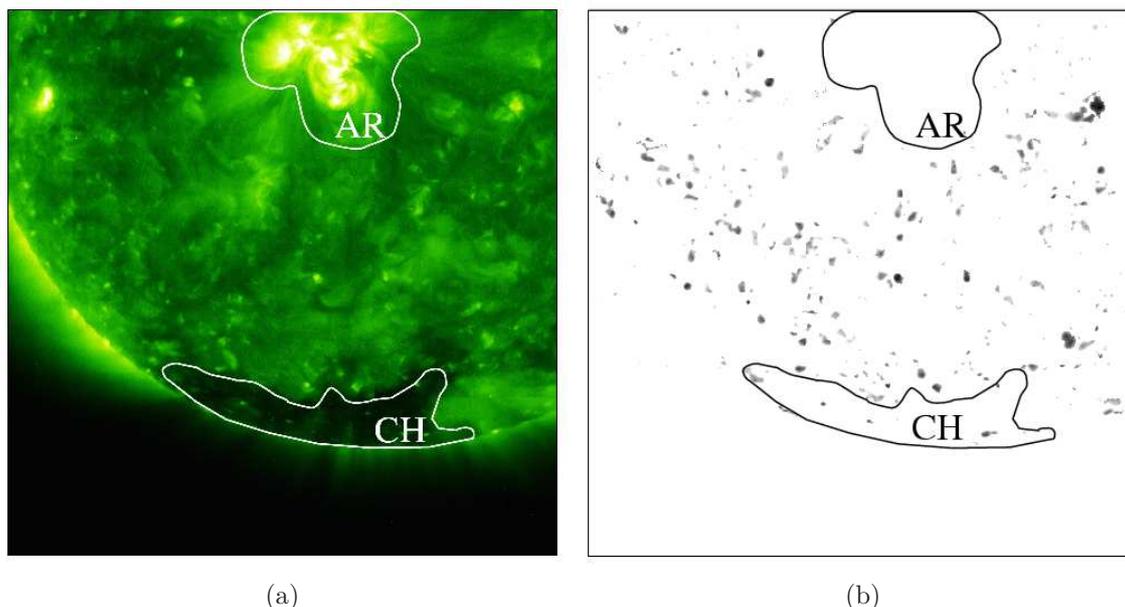


FIG. 5.16 – (a) Image originale. (b) BPs détectés sur la couronne calme.

Il est premièrement possible d'effectuer une étude des BPs sur le long terme, et d'observer, par exemple, si leur densité, relativement à la surface de la couronne calme, croît ou décroît avec le cycle solaire [HCV00].

Dans un autre registre, il existe une procédure permettant d'évaluer le champ de vitesse de la couronne solaire en utilisant les BPs comme traceurs du mouvement sur deux images successives d'une même vidéo [VBW03]. La décomposition en objets de chaque image apporte d'autres éléments pour ancrer et modéliser ce mouvement de manière automatique.

Des corrélations entre BPs détectés à différentes longueurs d'onde pourraient aussi fournir une information importante quant à leur structure tridimensionnelle.

Finalement, l'extraction des objets constitutifs d'une image expliquée à la section précédente peut être étendue à l'étude d'autres phénomènes solaires. La méthode peut dans ce cas servir de base à une classification ultérieure de ces éléments et à une étude systématique de leur évolution temporelle en termes de nombre, de formes, d'intensité moyenne ... [HGJ03, HJZ02]

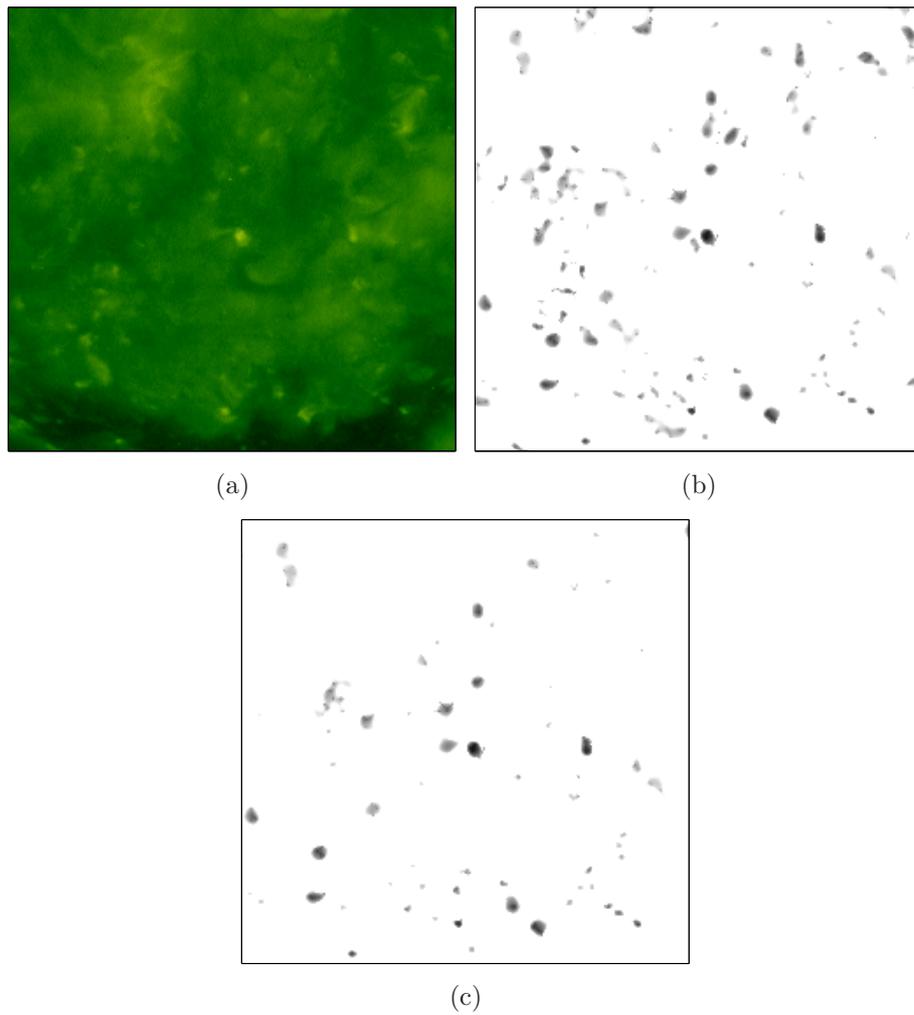


FIG. 5.17 – (a) Zoom sur l'image originale. (b) Zoom sur les BPs détectés. (c) Suppression de tous les BPs avec une anisotropie supérieure à 2.

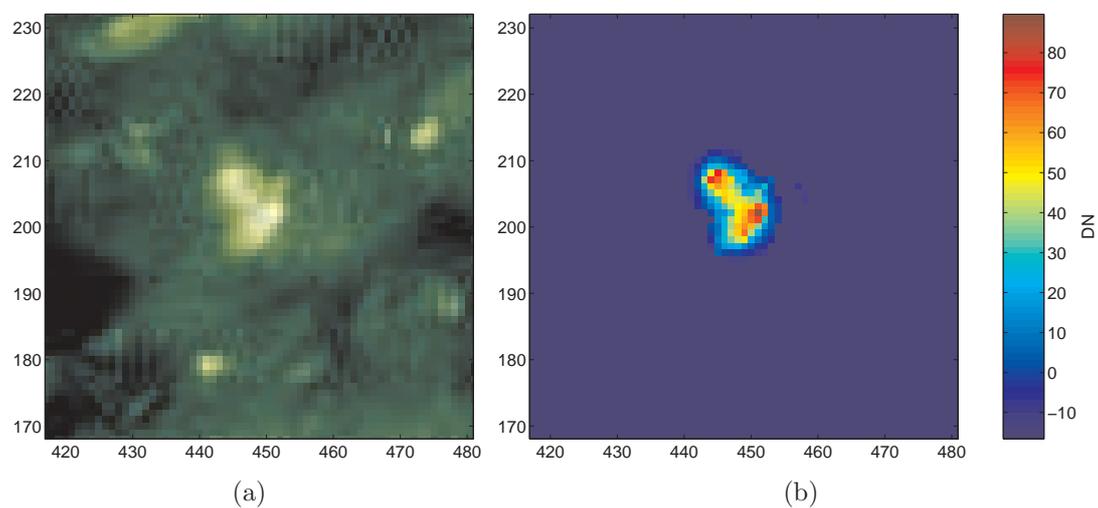


FIG. 5.18 – Sélection d'un BP. (a) Zoom sur l'image originale. (b) Sélection du BP central.

# Annexe A

## Démonstrations

### A.1 Chapitre 1 : Représentations fréquentielles

**Démonstration de la proposition 1.4 (p. 12) :** Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{B}_{\xi_0}$ , avec  $\xi_0 < \frac{\pi}{T}$ , alors

$$\begin{aligned}\langle f | g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dt f^*(t) g(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi \hat{f}^*(\xi) \hat{g}(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi \hat{f}^*(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + k \frac{2\pi}{T}) \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}^*(\xi) \hat{g}_d(\xi) \\ &= T \langle f | g_d \rangle \\ &= T \sum_{m \in \mathbb{Z}} f^*(mT) g(mT),\end{aligned}$$

puisque  $g_d(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(mT) \delta(t - mT)$  et en employant (1.31).

En outre,  $(f * g)(t) = \langle f^* | \bar{g}_t \rangle$ , avec  $\bar{g}_t(t) = g(-t)$ . Mais puisque  $\hat{\bar{g}}_t(\xi) = \hat{g}(-\xi) e^{i\xi t}$ ,  $\bar{g}_t \in \mathcal{B}_{\xi_0}$ , et

$$(f * g)(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \bar{g}_t(nT) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) g(t - nT).$$

**Démonstration de la proposition 1.3 (p. 17) :** Soit  $h \in L^2(S^2)$ , et  $g \in L^2(S^2)$  axisymétrique, la corrélation de ces deux fonctions est donnée par (1.63), c.-à-d.

$$(g \star h)(\omega) = \int_{S^2} d\mu(\omega') [R_{[\omega]} g]^*(\omega') h(\omega'),$$

avec  $\omega = (\theta, \varphi)$  et  $[\omega] = \rho(\theta, \varphi, 0) \in SO(3)$  en paramétrisation Eulerienne.

Etant donné que  $\hat{g}(l, m) = \hat{g}(l, 0) \delta_{m0}$  et en employant la décomposition en fonctions de Wigner  $\mathcal{D}_{mn}^l(\rho)$  [Vil69],

$$\begin{aligned} \widehat{[R_\rho g]}(l, m) &= \sum_{|n| \leq l} \mathcal{D}_{mn}^l(\rho) \hat{g}(l, n) \\ &= \mathcal{D}_{m0}^l(\rho) \hat{g}(l, 0) \end{aligned}$$

pour toute fonction  $g \in L^2(S^2)$  et tout  $\rho \in SO(3)$ . Si  $\rho = \rho(\varphi, \theta, 0)$  en paramétrisation Eulerienne,

$$\mathcal{D}_{m0}^l(\rho) \hat{g}(l, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{m*}(\omega) \hat{g}(l, 0).$$

Par conséquent, en appliquant Parseval à la formule (1.63), nous obtenons, puisque  $\hat{g}(l, 0) \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (g \star h)(\omega) &= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \widehat{[R_\rho g]}^*(l, m) \hat{h}(l, m) \\ &= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{g}^*(l, 0) \hat{h}(l, m) Y_l^m(\omega), \end{aligned}$$

prouvant que

$$\widehat{(g \star h)}(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{g}^*(l, 0) \hat{h}(l, m),$$

pour tout  $(l, m) \in \mathcal{N}$ .

## A.2 Chapitre 2 : Analyse continue en ondelettes

**Démonstration de la proposition 2.5 (p. 39) :** Etant donné une fonction  $f \in L^2(S^2)$ , commençons par réécrire les coefficients  $W_f(\rho, a) = \langle \psi_{\rho, a} | f \rangle$  en Fourier pour  $\rho \in SO(3)$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . En utilisant la relation de Plancherel des harmoniques sphériques et la décomposition en fonctions de Wigner précitée, nous obtenons

$$\begin{aligned} W_f(\rho, a) &= \int_{S^2} d\mu(\omega) [R_\rho D_a \psi]^*(\omega) f(\omega) \\ &= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \widehat{[R_\rho D_a \psi]}^*(l, m) \hat{f}(l, m), \\ &= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{|n| \leq l} \hat{f}(l, m) \mathcal{D}_{mn}^{l*}(\rho) \hat{\psi}_a^*(l, n), \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{N} = \{(l, m) : l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l\}$ .

En outre, pour toute fonction  $g \in L^2(S^2)$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{SO(3)} d\nu(\rho) W_f(\rho, a) [R_\rho g](\omega) \\
&= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{|n| \leq l} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, n) \int_{SO(3)} d\nu(\rho) \mathcal{D}_{mn}^{l*}(\rho) [R_\rho g](\omega) \\
&= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{|n| \leq l} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, n) \sum_{(l', m') \in \mathcal{N}} \int_{SO(3)} d\nu(\rho) \mathcal{D}_{mn}^{l*}(\rho) \widehat{[R_\rho g]}(l', m') Y_{l'}^{m'}(\omega) \\
&= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{|n| \leq l} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, n) \sum_{(l', m') \in \mathcal{N}} \sum_{|n'| \leq l'} \hat{g}(l', n') Y_{l'}^{m'}(\omega) \int_{SO(3)} d\nu(\rho) \mathcal{D}_{mn}^{l*}(\rho) \mathcal{D}_{m'n'}^{l'}(\rho).
\end{aligned}$$

Les fonctions de Wigner étant orthogonales entre elles, c.-à-d.

$$\int_{SO(3)} d\nu(\rho) \mathcal{D}_{mn}^{l*}(\rho) \mathcal{D}_{m'n'}^{l'}(\rho) = \frac{8\pi^2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{da d\nu(\rho)}{a^3} W_f(\rho, a) [R_\rho g](\omega) \\
&= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \frac{8\pi^2}{2l+1} \hat{f}(l, m) \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{da}{a^3} \sum_{|n| \leq l} \hat{\psi}_a^*(l, n) \hat{g}(l, n) Y_l^m(\omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si  $G(l) > 0$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , c.-à-d. si  $\int_{S^1} d\varphi \psi(\theta, \varphi) \neq 0$  (cfr. [AV99]), et si nous prenons  $g = L_\psi^{-1} D_a \psi$ , c.-à-d. en Fourier

$$\hat{g}(l, n) = \left[ \frac{8\pi^2}{2l+1} \sum_{|n'| < l} |\hat{\psi}_a(l, n')|^2 \right]^{-1} \hat{\psi}_a(l, n) = \frac{1}{G(l)} \hat{\psi}_a(l, n),$$

nous voyons clairement que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{SO(3)} \frac{da d\nu(\rho)}{a^3} W_f(\rho, a) [R_\rho L_\psi^{-1} D_a](\omega) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{|n| \leq l} \hat{f}(l, m) Y_l^m(\omega) = f.$$

**Démonstration du corollaire 2.3 (p. 39) :** La démonstration est identique à celle de la proposition 2.5 (cfr. section A.2). La seule différence est le facteur  $4\pi$  apparaissant dans la définition (2.83) de  $L_\psi$ . Ce dernier provient de l'orthogonalité des fonctions de Wigner sur  $S^2$  :

$$\int_{S^2} d\mu(\omega) D_{mn}^l([\omega]) D_{m'n'}^{l*}([\omega]) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (\text{A.1})$$

avec  $[\omega] = \rho(\varphi, \omega, 0)$  en notation Eulerienne.

### A.3 Chapitre 3 : Ondelettes, régularité et rayon de courbure

**Démonstration de la proposition 3.1 (p. 48) :** Supposons que la fonction  $f'(x)$  soit Hölderienne de classe  $\alpha$  en un point  $y \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $\exists K > 0, \exists \delta > 0$  tels que

$$|f'(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x-y)^k| \leq K |x-y|^\alpha,$$

avec  $n = \lfloor \alpha \rfloor$ .

Par conséquent, en supposant, sans perte de généralité, que  $x > y$  avec  $|x-y| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k| &= |f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k| \\ &= \left| \int_y^x du f'(u) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \int_y^x du k u^{k-1} \right| \\ &= \left| \int_y^x du \left( f'(u) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} u^{k-1} \right) \right| \\ &= \left| \int_y^x du \left( f'(u) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} u^k \right) \right| \\ &\leq \int_y^x du \left| f'(u) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} u^k \right| \\ &\leq \int_y^x du K (u-y)^\alpha \\ &\leq \frac{K}{\alpha+1} |x-y|^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

**Démonstration de la proposition 3.2 (p. 48) :** Supposons pour commencer que  $\alpha \in [0, 1]$ . Si  $f \in L^1(\mathbb{R}), \forall x, u \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(u)|}{|x-u|^\alpha} &= \left| \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{f}(\xi) \frac{(e^{i\xi x} - e^{i\xi u})}{|x-u|^\alpha} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| \frac{|e^{i\xi x} - e^{i\xi u}|}{|x-u|^\alpha}. \end{aligned}$$

Si  $|\xi||x-u| \geq 1$ , alors

$$\frac{|e^{i\xi x} - e^{i\xi u}|}{|x-u|^\alpha} \leq \frac{2}{|x-u|^\alpha} \leq 2|\xi|^\alpha.$$

Dans le cas inverse si  $|\xi(x-u)| < 1$ ,

$$\frac{|e^{i\xi x} - e^{i\xi u}|}{|x-u|^\alpha} \leq \frac{|\xi||x-u|}{|x-u|^\alpha} = |\xi||x-u|^{1-\alpha} < |\xi|^\alpha.$$

Par conséquent,

$$\frac{|f(x) - f(u)|}{|x-u|^\alpha} \leq 2 \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| |\xi|^\alpha \leq 2 \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha).$$

Nous voyons donc bien que  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(u)$  si la dernière intégrale est finie.

Si  $\alpha > 1$ , alors, avec  $m = \lfloor \alpha \rfloor$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^m) < \infty,$$

puisque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^m) &\leq \|\hat{f}\|_1 + \int_{[-1,1]} d\xi |\hat{f}(\xi)| |\xi|^m + \int_{\mathbb{R}/[-1,1]} d\xi |\hat{f}(\xi)| |\xi|^m \\ &\leq \|\hat{f}\|_1 + \int_{[-1,1]} d\xi |\hat{f}(\xi)| + \int_{\mathbb{R}/[-1,1]} d\xi |\hat{f}(\xi)| |\xi|^\alpha \\ &\leq 2\|\hat{f}\|_1 + \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| |\xi|^\alpha \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} d\xi |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha). \end{aligned}$$

En conséquence,  $f$  est bornée et  $m$  fois continûment différentiable avec dérivées bornées car

$$|f^{(k)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} d\xi |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq k \leq m.$$

En outre, la proposition 3.1 montre que  $f$  est uniformément Hölderienne  $\alpha$  si  $f^{(m)} \in \mathfrak{C}^{\alpha-m}(\mathbb{R})$ . Par conséquent, il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à  $f^{(m)}$  en tenant compte du fait que  $\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (i\xi)^m \hat{f}(\xi)$ .

**Démonstration du théorème 3.1 (p. 49) :** Soit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , une ondelette à décroissance rapide avec  $n = \lceil \alpha \rceil$  moments nuls. Supposons que  $f \in \mathfrak{C}^\alpha(u)$ . Dès lors, pour une certaine largeur  $\delta > 0$ , il existe une constante  $K > 0$  et un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor \alpha \rfloor$  tels que

$$|f(x) - P(x-u)| \leq K|x-u|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x-u| \leq \delta.$$

Par conséquent, en employant les  $n$  moments nuls de  $\psi$ ,

$$\begin{aligned} |W_f(b, a)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \psi_{b,a}^*(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} dx (f(x) - P(x-u)) \psi_{b,a}^*(x) \right| \\ &\leq \int_U dx |f(x) - P(x-u)| |\psi_{b,a}(x)| + R(b, a), \end{aligned}$$

avec  $U = [u - \delta, u + \delta]$  et  $R(b, a) = \int_{\mathbb{R}/U} dx |f(x) - P(x - u)| |\psi_{b,a}(x)|$ .

Si  $\psi$  est à décroissance rapide, c.-à-d. si

$$\forall m \in \mathbb{N}^0, \exists K > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |\psi(t)| \leq \frac{K}{|t|^m},$$

alors, pour  $m > n + 2$  et  $b \in ]u - \delta, u + \delta[$ ,

$$\begin{aligned} R(b, a) &\leq K a^{m-1} \int_{\mathbb{R}/U} dx \frac{|f(x) - P(x - u)|}{|x - b|^m} \\ &\leq K' K a^{m-1} \int_{\mathbb{R}/U} dx \frac{|x - u|^{n+1}}{|x - b|^m} < \infty, \end{aligned}$$

pour une certaine constante  $K' > 0$ . Par conséquent,  $R(b, a) = O(a^{m-1})$  pour  $m > n + 2$  et  $b \in ]u - \delta, u + \delta[$ . Il existe donc une largeur  $\eta < \delta$ , et une échelle  $a_0$  telles que  $R(b, a) \simeq 0$  pour tout  $b \in [u - \eta, u + \eta]$  et tout  $a < a_0$ .

Dès lors, pour ces mêmes  $(b, a)$ ,

$$\begin{aligned} |W_f(b, a)| &\leq \int_U dx |f(x) - P(x - u)| |\psi_{b,a}(x)| \\ &\leq K \int_U dx |x - u|^\alpha |\psi_{b,a}(x)|, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $\frac{x-b}{a} = y$  et en employant la relation

$$|u + v|^\alpha \leq 2^\alpha (|u|^\alpha + |v|^\alpha), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.2})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} |W_f(b, a)| &\leq K \int_{U'} dx |ay + b - u|^\alpha |\psi(y)| \\ &\leq 2^\alpha K a^\alpha \int_{U'} dx |y|^\alpha |\psi(y)| + aK |b - u|^\alpha \int_{U'} dx |\psi(y)| \\ &\leq 2^\alpha K a^\alpha (I_\alpha + \|\psi\|_1 \left| \frac{b - u}{a} \right|^\alpha), \end{aligned}$$

avec  $U' = [\frac{u-\delta-b}{a}, \frac{u+\delta-b}{a}]$  et  $I_\alpha = \int_{U'} dx |y|^\alpha |\psi(y)|$  qui est finie par la décroissance rapide de  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ .

Finalement,

$$|W_f(b, a)| \leq A a^\alpha \left(1 + \left| \frac{b - u}{a} \right|^\alpha\right),$$

en prenant  $A = 2^\alpha K (\max(\|\psi\|_1, I_\alpha))^{-1}$ , ce qui achève la démonstration.

**Démonstration de la proposition 3.6 (p. 53) :** Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ . Si l'exposant de Hölder isotrope de  $f$  en  $\vec{u}$  est  $h_f(\vec{u})$ , cela implique qu'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor h_f(\vec{u}) \rfloor$ , une constante  $K > 0$ , et une largeur  $\delta > 0$  tels que,

$$|f(\vec{x}) - P(\vec{x} - \vec{u})| \leq \|\vec{x} - \vec{u}\|^{\alpha_i}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{u}\| \leq \delta,$$

avec  $\alpha_i = h_f(\vec{u})$ .

Cependant, en maintenant la direction  $\varphi = \arg(\vec{x} - \vec{u})$  constante, nous pouvons réécrire cette dernière équation,

$$|f(\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi) - P(\lambda)| \leq |\lambda|^{\alpha_i},$$

avec  $\lambda = \vec{e}_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{u}) \in [-\delta, \delta]$ , et  $P'(\lambda) = P(\lambda \vec{e}_\varphi)$ . Il est clair que  $P'$  est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à  $\lfloor \alpha_i \rfloor$ . Par conséquent, la définition de régularité directionnelle implique que  $f$  est régulière  $\alpha_i$  dans la direction  $\varphi$  au point  $\vec{u}$ . Donc,  $h_f(\vec{u}) = \alpha_i \leq h_f(\vec{u}, \varphi)$ . Comme cette dernière inégalité est indépendante de l'orientation,

$$h_f(\vec{u}) \leq \min_{\varphi \in S_1} h_f(\vec{u}, \varphi).$$

**Démonstration de la proposition 3.7 (p. 53) :** Nous partons du même point qu'à la démonstration de la proposition 3.2. Supposons que  $\alpha \in [0, 1]$ . Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  et  $\forall \varphi \in S_1$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda|^{-\alpha} |f(\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi) - f(\vec{u})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \hat{f}(\vec{k}) (e^{i \vec{k} \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi)} - e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}}) |\lambda|^{-\alpha} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| |e^{i \vec{k} \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi)} - e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}}| |\lambda|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Si  $|\lambda| |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi| \geq 1$ , alors

$$|e^{i \vec{k} \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi)} - e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}}| |\lambda|^{-\alpha} \leq 2 |\lambda|^{-\alpha} \leq 2 |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^\alpha.$$

Dans le cas inverse, si  $|\lambda| |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi| < 1$ ,

$$|e^{i \vec{k} \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi)} - e^{i \vec{k} \cdot \vec{u}}| |\lambda|^{-\alpha} \leq |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi| |\lambda|^{1-\alpha} < |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^\alpha.$$

Par conséquent,

$$|f(\vec{u} + \lambda \vec{e}_\varphi) - f(\vec{u})| |\lambda|^{-\alpha} \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^\alpha \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| (1 + |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^\alpha).$$

Si  $\alpha > 1$ , alors, avec  $m = \lfloor \alpha \rfloor$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| (1 + |\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi|^m) < \infty,$$

et  $f$  est  $m$  fois différentiable dans la direction  $\vec{e}_\varphi$ .

Pour  $\alpha > 1$ , il est facile de montrer que  $f$  est uniformément Hölderienne  $\alpha$  si et seulement si  $f^{(n)} \in \mathfrak{C}^{\alpha-n}(\mathbb{R})$ . Par conséquent, la proposition est prouvée en appliquant le raisonnement précédent à  $f^{(m)}$ .

**Démonstration de la proposition 3.8 (p. 54) :** Limitons-nous premièrement au cas où  $\theta = 0$ . Posons  $\vec{b} = (b, c) \in \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  un ondelette séparable de la forme

$$\psi(\vec{x}) = \eta(x) \phi(y),$$

où  $\eta$  est une ondelette unidimensionnelle de  $n = \lceil \max_{\theta \in S_1} \alpha(\theta) \rceil$  moments nuls,  $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \phi \rangle = 1$  et  $\phi > 0$ .

La transformée en ondelettes directionnelle anisotrope est

$$W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta) = \langle f | \psi_{\vec{b}, a, \epsilon, \theta} \rangle,$$

où  $\psi_{\vec{b}, a, \epsilon, \theta} = \frac{1}{a\epsilon} \psi(r_\theta^{-1} d_{a, \epsilon}^{-1}(\vec{x} - \vec{b}))$ ,  $r_\theta$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ , et  $d_{a, \epsilon}$  est la matrice de dilatation anisotrope définie en (2.40).

Nous avons,

$$\begin{aligned} W_f(\vec{b}, a, \epsilon, 0) &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} f(\vec{x}) \frac{1}{a\epsilon} \eta^*\left(\frac{x-b}{a}\right) \phi^*\left(\frac{y-c}{a}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx f_\epsilon(x, c) \frac{1}{a} \eta^*\left(\frac{x-b}{a}\right), \end{aligned}$$

avec

$$f_\epsilon(x, c) = \int_{\mathbb{R}} dy f(x, y) \frac{1}{\epsilon} \phi^*\left(\frac{y-c}{a}\right).$$

Dès lors, puisque  $\eta$  possède  $n = \lceil \max_{S_1} \alpha \rceil$  moments nuls, pour tout polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$ ,

$$\begin{aligned} |W_f(\vec{b}, a, \epsilon, 0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} dx (f_\epsilon(x, c) - Q(x-u)) \frac{1}{a} \eta^*\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx |f_\epsilon(x, c) - Q(x-u)| \frac{1}{a} |\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx |f_\epsilon(x, c) - f(x, v)| \frac{1}{a} |\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} dx |f(x, v) - Q(x-u)| \frac{1}{a} |\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)| \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Majorons séparément les deux intégrales  $T_1$  et  $T_2$ . Pour la première, puisque  $\langle \phi \rangle = 1$  avec  $\phi > 0$ ,

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\mathbb{R}} dx |f_\epsilon(x, c) - f(x, v)| \frac{1}{a} |\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} |f(x, y) - f(x, v)| \frac{1}{a\epsilon} |\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)| \phi\left(\frac{y-c}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour une certaine largeur  $\kappa > 0$ ,  $f \in \mathfrak{C}^{\alpha_i}(U)$  avec  $U = B(\vec{u}, \kappa)$ . Autrement dit,  $\exists K > 0, \forall \vec{p}, \vec{q} \in U$ ,

$$|f(\vec{p}) - f(\vec{q})| \leq K \|\vec{p} - \vec{q}\|^{\alpha'_i}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $\alpha'_i = \min(1, \alpha_i) < \alpha_i$ , puisque  $\mathfrak{C}^{\alpha_i}(U) \subseteq \mathfrak{C}^{\alpha'_i}(U)$ .

Appliquant cette inégalité à l'intégrand précédent, nous obtenons,

$$T_1 \leq K \int_U d^2\vec{x} |y - v|^{\alpha'_i} \frac{1}{a\epsilon} \left| \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \phi\left(\frac{y-c}{\epsilon}\right) + R(\vec{b}, a, \epsilon, 0),$$

avec

$$R(\vec{b}, a, \epsilon, 0) = \int_{\mathbb{R}^2/U} d^2\vec{x} |f(x, y) - f(x, v)| \frac{1}{a\epsilon} \left| \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \phi\left(\frac{y-c}{\epsilon}\right).$$

Puisque  $\psi$  est à décroissance rapide, c.-à-d.

$$\forall m \in \mathbb{N}^0, \exists K > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad |\psi(\vec{x})| \leq \frac{K}{\|\vec{x}\|^m} \leq \frac{K}{|x|^{\frac{m}{2}} |y|^{\frac{m}{2}}},$$

si  $\vec{b} \in \text{int } U$ ,  $R(\vec{b}, a, \epsilon, 0) = O(a^{\frac{m}{2}-1} \epsilon^{\frac{m}{2}-1})$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Dès lors, il existe une largeur  $\kappa' < \kappa$  et deux échelles minimales  $a_0 > 0$  et  $\epsilon_0 > 0$  telles que  $R(\vec{b}, a, \epsilon, 0) \simeq 0$  pour tout  $\vec{b} \in U' = B(\vec{u}, \kappa')$  et pour tout  $a$  et  $\epsilon$  respectivement inférieurs à  $a_0$  et  $\epsilon_0$ .

Par conséquent, pour ces mêmes valeurs,

$$\begin{aligned} T_1 &\leq K \|\eta\|_1 \int_{\mathbb{R}} dy |y - c + c - v|^{\alpha'_i} \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{y-c}{\epsilon}\right) \\ &\leq 2^{\alpha'_i} K \|\eta\|_1 \left( \|\cdot\|^{\alpha'_i} \phi\|_1 \epsilon^{\alpha'_i} + |c - v|^{\alpha'_i} \right), \end{aligned}$$

en employant (A.2).

Analysons maintenant  $T_2$ .

$$T_2 = \int_{\mathbb{R}} dx |f(x, v) - Q(x - u)| \frac{1}{a} \left| \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|.$$

Par hypothèse, il existe un polynôme  $P$  de degré  $\lfloor \alpha(0) \rfloor$  et une largeur  $\delta > 0$  tels que

$$|f(x, v) - P(x - u)| \leq K' |x - u|^{\alpha(0)}, \quad \forall x \in I = [u - \delta, u + \delta].$$

Dès lors, pour  $Q = P$ ,

$$T_2 \leq K' \int_I dx |x - u|^{\alpha(0)} \frac{1}{a} \left| \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| + R'(b, a),$$

avec  $R'(b, a) = \int_{\mathbb{R}/I} dx |f(x, v) - P(x - u)| \frac{1}{a} \left| \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|.$

De nouveau, puisque  $\psi$ , et a fortiori  $\eta$ , est à décroissance rapide, il est possible de trouver une largeur  $\kappa'' < \kappa$  et deux échelles minimales  $a'_0 > 0$  et  $\epsilon'_0 > 0$  telles que  $R \simeq 0$  et  $R' \simeq 0$  pour tout  $\vec{b} \in U'' = B(\vec{u}, \kappa'')$ , et pour tout  $a$  et  $\epsilon$  respectivement inférieurs à  $a'_0$  et  $\epsilon'_0$ . Dans ces conditions, et de la même manière que précédemment,

$$\begin{aligned} T_2 &\leq K' \int_I dx |x - u|^{\alpha(0)} \frac{1}{a} |\eta(\frac{x - b}{a})| \\ &\leq 2^{\alpha(0)} K' ( \|\cdot\|^{\alpha(0)} \eta \|_1 a^{\alpha(0)} + \|\eta\|_1 |b - u|^{\alpha(0)} ). \end{aligned}$$

Au total, si  $a < \min(a_0, a'_0)$  et  $\epsilon < \min(\epsilon_0, \epsilon'_0)$ ,

$$|W_f(\vec{b}, a, \epsilon, 0)| \leq A a^{\alpha(0)} (1 + |\frac{b - u}{a}|^{\alpha(0)}) + B \epsilon^{\alpha'_i} (1 + |\frac{c - v}{\epsilon}|^{\alpha'_i}),$$

pour deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ . La transformée en ondelettes directionnelle à dilatation anisotrope étant clairement covariante sous rotation, nous pouvons donc affirmer, que pour tout  $\theta \in S_1$ ,

$$|W_f(\vec{b}, a, \epsilon, \theta)| \leq A a^{\alpha(\theta)} (1 + |a^{-1}(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_\theta|^{\alpha(\theta)}) + B \epsilon^{\alpha'_i} (1 + |\epsilon^{-1}(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_{\tilde{\theta}}|^{\alpha'_i}),$$

avec  $\vec{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\tilde{\theta} = \theta + \frac{\pi}{2}$ .

## A.4 Chapitre 4 : Repères d'ondelettes

**Démonstration de la proposition 4.2 (p. 65) :** Nous avons déjà montré que  $\text{Im } U$  est inclus à  $l^2(\Gamma)$ . Montrons que cette inclusion est stricte. Si les  $\psi_n$  sont linéairement dépendants, il existe un  $x \in l^2(\Gamma)$  non nul uniquement sur un ensemble fini de points de  $\Gamma$ , tel que

$$\sum_{n \in \Gamma} x[n] \psi_n = 0. \quad (\text{A.4})$$

En projetant cette dernière équation sur un  $f$  de  $\mathfrak{H}$ , nous obtenons

$$\sum_{n \in \Gamma} x^*[n] \langle \psi_n | f \rangle = \langle x | Uf \rangle, \quad (\text{A.5})$$

où le dernier produit scalaire est celui de  $l^2(\Gamma)$ . Par conséquent,  $\text{Im } U$  est perpendiculaire à  $x$  et son inclusion à  $l^2(\Gamma)$  est donc stricte.

Pour la question de l'inverse, remarquons tout d'abord que  $U$  est injectif sur  $\text{Im } U$ . En effet,  $Uf = 0$  implique  $f = 0$  puisque, par l'inégalité gauche de (4.1),  $\|Uf\| = 0$  impose  $\|f\| = 0$ .

En conséquence,  $U$  est inversible sur son image. Nommons  $\bar{U}_1^{-1} : \text{Im } U \rightarrow \mathfrak{H}$ , l'inverse à gauche correspondant.

En désignant par  $\text{Im } U^\perp$  le sous espace de  $l^2(\Gamma)$  perpendiculaire à  $\text{Im } U$ ,  $\text{Im } U^\perp \neq \emptyset$  puisqu'il contient au moins  $x$ .

Dès lors, tout opérateur  $\bar{U}^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{H}$  donné par

$$\bar{U}^{-1}x = \begin{cases} \bar{U}_1^{-1}x & \text{si } x \in IU \\ \bar{U}_2^{-1}x & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

avec  $\bar{U}_2^{-1}$  un opérateur linéaire quelconque, est clairement un inverse à gauche de  $U$  et il en existe par construction une infinité.

**Démonstration de la proposition 4.3 (p. 65) :** Montrons tout d'abord que l'opérateur auto-adjoint  $U^*U$  est inversible sur  $\mathfrak{H}$ .  $U^*U$  est injectif car  $U^*Uf = 0$  implique que  $\langle U^*Uf | f \rangle = \langle Uf | Uf \rangle = 0$ . Par l'inégalité gauche de (4.1),  $\|f\| = 0$ , ce qui implique que  $f = 0$ .  $U^*U$  est surjectif sur  $\mathfrak{H}$ . Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction  $g$  orthogonale à l'image de  $U^*U$ , c.-à-d. telle que  $\langle U^*Ug | g \rangle = 0$ . Dans ce cas,  $\langle Ug | Ug \rangle = 0$  et  $g = 0$ .

En conséquence,  $(U^*U)^{-1}$  existe. Pour prouver (4.7), il suffit donc de prouver que

$$U^*x = (U^*U)\tilde{U}^{-1}x, \quad \forall x \in l^2(\Gamma). \quad (\text{A.7})$$

Pour  $x \in \text{Im } U^\perp$ ,  $\tilde{U}^{-1}x = 0$  par définition. Or,  $\langle U^*x | f \rangle = \langle x | Uf \rangle = 0$  pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ , et donc  $U^*x = 0$ . Pour  $x \in \text{Im } U$ , il est clair que  $(U^*U)\tilde{U}^{-1}x = U^*(U\tilde{U}^{-1})x = x$  ce termine la vérification de (A.7).

**Démonstration de la proposition 4.4 (p. 65) :** Nous avons vu à la section 4.1 que  $U^*x = \sum_{n \in \Gamma} x[n] \psi_n$ . De même,  $\tilde{U}^{-1}x = \sum_{n \in \Gamma} x[n] \tilde{\psi}_n$ , avec  $\tilde{\psi}_n = (U^*U)^{-1}\psi_n$ . En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{-1}x &= (U^*U)^{-1}U^*x \\ &= (U^*U)^{-1} \sum_{n \in \Gamma} x[n] \psi_n \\ &= \sum_{n \in \Gamma} x[n] \tilde{\psi}_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $f \in \mathfrak{H}$ ,

$$f = \tilde{U}^{-1}Uf = \sum_{n \in \Gamma} \langle \psi_n | f \rangle \tilde{\psi}_n.$$

Dès lors, pour tout  $f, g \in \mathfrak{H}$ ,

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \sum_{n \in \Gamma} \langle f | \psi_n \rangle \langle \tilde{\psi}_n | g \rangle \\ &= \langle f | \sum_{n \in \Gamma} \langle \tilde{\psi}_n | g \rangle \psi_n \rangle, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de (4.9). Pour obtenir les bornes du repère  $\{\tilde{\psi}_n : n \in \Gamma\}$ , il faut employer le lemme suivant.

**Lemme A.1.** *Si  $O : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  est un opérateur autoadjoint tel que*

$$A\mathcal{I} \leq O \leq B\mathcal{I},$$

*pour  $0 < A \leq B < \infty$ , alors  $O$  est inversible et respecte l'inégalité*

$$\frac{1}{A}\mathcal{I} \leq O^{-1} \leq \frac{1}{B}\mathcal{I},$$

Un preuve de ce lemme peut être trouvée dans [Mal98] dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie, et dans [Dau92] dans le cas général. Le reste de la démonstration consiste simplement à observer que  $L = (U^*U)$  est autoadjoint et qu'il vérifie la condition de repère (4.3).

**Démonstration du théorème 4.2 (p. 71) :** Il s'agit de trouver les conditions sur  $\lambda, N, \beta_0$  et  $\beta_1$  assurant que, pour deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} |\langle \psi_{j,\mathbf{m},n} | f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (\text{A.8})$$

Développons le terme central de cette inégalité en passant à l'espace fréquentiel.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} |\langle \psi_{j,\mathbf{m},n} | f \rangle|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \lambda^{-2j} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}' e^{i\vec{b}_{j,\mathbf{m},n}(\vec{k}-\vec{k}')} \\ &\quad \hat{f}(\vec{k}) \hat{f}^*(\vec{k}') \hat{\psi}^*(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k}) \hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k}') \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \lambda^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}' e^{i\vec{u}_{\mathbf{m}}(\vec{k}-\vec{k}')} \\ &\quad \hat{f}(\lambda^j r_n \vec{k}) \hat{f}^*(\lambda^j r_n \vec{k}') \hat{\psi}^*(\vec{k}) \hat{\psi}(\vec{k}'), \end{aligned}$$

où  $r_n = r_{\theta_n}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta_n$ .

Selon la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{i\vec{u}_{\mathbf{m}}\vec{v}} = \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \delta(\vec{v} - \vec{u}_{\mathbf{m}}),$$

où  $\vec{u}_{\mathbf{m}} = 2\pi(\frac{m_0}{\beta_0}, \frac{m_1}{\beta_1})$ . En conséquence,

$$\begin{aligned} K &= \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \lambda^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{f}(\lambda^j r_n \vec{k}) \hat{f}^*(\lambda^j r_n(\vec{k} - \vec{u}_{\mathbf{m}})) \hat{\psi}^*(\vec{k}) \hat{\psi}(\vec{k} - \vec{u}_{\mathbf{m}}) \\ &= \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{f}(\vec{k}) \hat{f}^*(\vec{k} - \lambda^j r_n \vec{u}_{\mathbf{m}}) \hat{\psi}^*(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k}) \hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \vec{u}_{\mathbf{m}}). \end{aligned}$$

Scindons  $K$  en un terme positif  $P$  où  $\mathbf{m} = (0, 0)$ , et un terme  $Q$  où  $\mathbf{m} \neq (0, 0)$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} K &= P + Q \\ &= \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})|^2 + \dots \\ &+ \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \hat{f}(\vec{k}) \hat{f}^*(\vec{k} - \lambda^j r_n \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \hat{\psi}^*(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k}) \hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}). \end{aligned}$$

Si  $\psi$  respecte les conditions (i) et (ii) du théorème 4.2, il est clair que

$$\frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} s(\lambda, N, \psi) \leq P \leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} S(\lambda, N, \psi).$$

Puisque  $P - |Q| \leq K \leq P + |Q|$ , il nous reste à majorer  $|Q|$  pour contrôler  $K$ .

$$\begin{aligned} |Q| &\leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})| |\hat{f}(\vec{k} - \lambda^j r_n \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| \\ &\leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k} - \lambda^j r_n \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})|^2 |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} + \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme en  $j$  et à celle en  $l$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} |Q| &\leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k} + \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j}r_n^{-1}\vec{k})| \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\psi$  vérifie la condition (iii) du théorème, cette dernière inégalité peut être majorée comme suit

$$|Q| \leq \frac{4\pi^2}{\beta_0\beta_1} \|f\|^2 \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} [\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \alpha(-\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})]^{\frac{1}{2}}.$$

Définissons la quantité

$$E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^*} [\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \alpha(-\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}})]^{\frac{1}{2}} = \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}^*)^2} \alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}),$$

où la dernière égalité exploite le fait que

$$\begin{aligned} \alpha(-\vec{u}) &= \sup_{\vec{k} \in \mathbb{R}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k} - \vec{u})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k})| \\ &= \sup_{\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \lambda^j r_n \vec{u}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k})| |\hat{\psi}(\lambda^{-j} r_n^{-1} \vec{k} + \vec{u})| \\ &= \alpha(\vec{u}), \end{aligned}$$

pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ . Il est clair que la somme définissant  $E$  converge puisque

$$\sup_{\vec{u} \in \mathbb{R}^2} (1 + \|\vec{u}\|)^{1+\epsilon} \alpha(\vec{u}) < \infty.$$

En outre, cette même condition implique que

$$\begin{aligned} \lim_{(\beta_0, \beta_1) \rightarrow (0,0)} E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi) &= \left[ \lim_{(\beta_0, \beta_1) \rightarrow (0,0)} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{m}}) \right] - \alpha(\vec{0}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, puisque

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{\beta_0 \beta_1} [s(\lambda, N, \psi) - E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi)] \|f\|^2 &\leq P - |Q| \\ \frac{4\pi^2}{\beta_0 \beta_1} [S(\lambda, N, \psi) + E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi)] \|f\|^2 &\geq P + |Q|, \end{aligned}$$

il existe deux valeurs critiques  $\beta_0^c, \beta_1^c > 0$ , telles que pour tout  $\beta_0 < \beta_0^c$  et  $\beta_1 < \beta_1^c$ ,  $s(\lambda, N, \psi) > E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi)$ ,  $s$  étant indépendant de  $\beta_0$  et  $\beta_1$ .

La famille  $\{\psi_{j,\mathbf{m},n}\}$  forme alors un repère de bornes

$$A = \frac{4\pi^2}{\beta_0 \beta_1} [s(\lambda, N, \psi) - E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi)] > 0 \quad (\text{A.9})$$

et

$$B = \frac{4\pi^2}{\beta_0 \beta_1} [S(\lambda, N, \psi) + E(\lambda, N, \beta_0, \beta_1, \psi)] < \infty, \quad (\text{A.10})$$

ce qui prouve le théorème.

**Démonstration de la proposition 4.6 (p. 73) :** Revenons à la condition de repère pour la famille  $\{\psi_{\vec{b},j,n} : (\vec{b}, j, n) \in \Lambda(a_0, \lambda, \Delta\theta)\}$ ,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} |\langle \psi_{\vec{b},j,n} | f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (\text{A.11})$$

pour  $0 < A \leq B < \infty$  fixés et  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  quelconque.

Détaillons la partie centrale de la double inégalité. Puisque

$$\widehat{W}_{j,n}(\vec{k}) = \hat{f}(\vec{k}) \hat{\psi}^*(a_j r_n^{-1} \vec{k}),$$

avec  $W_{j,n}(\vec{b}) = \langle \psi_{\vec{b},j,n} | f \rangle$ , nous obtenons par Plancherel,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} |\langle \psi_{\vec{b},j,n} | f \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2 |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\vec{k})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, si

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \leq B,$$

pour deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$ , l'équation (4.43) sera vérifiée.

Inversement, s'il existe une constante  $B < \infty$  telle que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\vec{k})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \leq B \|f\|^2,$$

alors, puisque  $\|f\|^2 = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} |\hat{f}(\vec{k})|^2$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \left( B - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \right) |\hat{f}(\vec{k})|^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité, valable pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , montre que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \leq B$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^2$  de mesure non nulle où  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 > B$  pour tout  $\vec{k} \in E$ . Alors, pour  $g \in L^2(\mathbb{R}^2) / \{0\}$  tel que  $\hat{g}$  est nul partout sur le complémentaire  $E^c$ , nous aurions

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{k} \left( B - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} |\hat{\psi}(a_j r_n^{-1} \vec{k})|^2 \right) |\hat{g}(\vec{k})|^2 < 0,$$

ce qui est contradictoire. Le même genre de raisonnement permet d'arriver au résultat associé à la borne inférieure.

**Démonstration de la proposition 4.9 (p. 88) :** Cette preuve est en grande partie issue de [Dau92]. Démontrons tout d'abord la première partie de la proposition et définissons la fonction  $f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(t - m)$ . A partir de la relation d'échelle (B.6), nous trouvons

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \phi(2t - 2m - n) \\ &= \sqrt{2} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \phi(2t - n') \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[n' - 2m] \\ &= \sqrt{2} \sum_{n'' \in \mathbb{Z}} \phi(2t - 2n'') \sum_{m' \in \mathbb{Z}} h[2m'] \\ &\quad + \sqrt{2} \sum_{n'' \in \mathbb{Z}} \phi(2t - 2n'' - 1) \sum_{m' \in \mathbb{Z}} h[2m' + 1] \end{aligned}$$

Dès lors, si  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[2n + 1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f(t) = f(2t) = \dots = f(2^q t)$ , pour  $q \in \mathbb{N}$ . En posant,  $t' = 2^q t$ , cette relation s'étend à  $q \in \mathbb{Z}$  et  $f(t) = \lim_{q \rightarrow -\infty} f(2^q t) = f(0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Ceci implique également que

$$f(0) = \int_0^1 dt f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 dt \phi(t + l) = \int_{\mathbb{R}} dt \phi(t) = 1,$$

ce qui prouve la condition suffisante de la proposition.

Inversement, si  $f(t) = c \in \mathbb{R}$ , alors  $\hat{f}(\xi) = 2\pi c \delta(\xi)$ . Par la formule de Poisson,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \hat{\phi}(\xi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{in\xi} \\ &= 2\pi \hat{\phi}(\xi) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - 2\pi m). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\hat{\phi}(2\pi n) = c \delta_{n0}$ .

Mais puisque  $\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\frac{\xi}{2}) \hat{\phi}(\frac{\xi}{2})$  (cfr. (B.8)), nous avons, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$0 = \hat{\phi}(2\pi(2n + 1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(2\pi n + \pi) \hat{\phi}(2\pi n + \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\pi) \hat{\phi}(2\pi n + \pi),$$

où la  $2\pi$ -périodicité de  $H$  a été employée.

Donc, si  $H(\pi) \neq 0$ ,  $\hat{\phi}(2\pi n + \pi) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Cependant,

$$\begin{aligned} \delta_{0n} &= \langle \phi | \tilde{\phi}(\cdot - n) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \phi^*(t) \tilde{\phi}(t - n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{\phi}^*(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{in\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi e^{in\xi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}^*(\xi + 2\pi n) \hat{\phi}(\xi + 2\pi n), \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\pi + 2\pi n) \hat{\phi}(\pi + 2\pi n) = 1,$$

en contradiction avec le résultat précédent. Dès lors,

$$H(\pi) = 0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m h[m] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[2m] - \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[2m + 1],$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Pour finir, en employant la relation d'échelle (B.7) et le choix

$$g[n] = (-1)^n \tilde{h}^*[1 - n],$$

nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi\left(t + \frac{m}{2}\right) &= \sqrt{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \tilde{h}^*[1 - n] \phi(2t + m - n) \\ &= \sqrt{2} \sum_{n, m' \in \mathbb{Z}} (-1)^n \tilde{h}^*[1 - n] \phi(2t + m') \\ &= \sqrt{2} \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-n'} \tilde{h}^*[n'] \phi(2t + m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Démonstration de la proposition 4.10 (p. 89) :** Nous démontrons le résultat uniquement pour  $\phi$ , les démonstrations des autres équations d'échelle étant similaires. Par la

relation d'échelle de  $\phi$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
\phi_{l-1,n}(t) &= 2^{\frac{l-1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(2^{l-1}t + 2^{l-1}m - n) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h[p] \phi(2^l t + 2^l m - 2n - p) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} \sum_{m,p \in \mathbb{Z}} h[p + 2^l m - 2n] \phi(2^l t - p) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} \sum_{m,r \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} h[2^l r + q + 2^l m - 2n] \phi(2^l t - 2^l r - q) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} \sum_{r,m \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} h[q + 2^l m - 2n] \phi(2^l t - 2^l r - q) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}[2^l]} h_l[q - 2n] \phi_{l,q}(t),
\end{aligned}$$

en posant  $p = 2^l r + q$  et  $h_l[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[n + 2^l m]$ .

**Démonstration de la proposition 4.11 (p. 89) :** Nous ne démontrons que la relation (4.103), la démonstration de (4.104) étant identique.

Partons de la relation (B.38), c.-à-d.

$$\phi_{l+1,n}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{h}[n - 2p] \phi_{l,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{g}[n - 2p] \chi_{l,p}(t),$$

pour  $l, n \in \mathbb{Z}$ . En périodisant celle-ci, il est clair que

$$\phi_{l+1,n}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{h}[n - 2p] \phi_{l,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{g}[n - 2p] \chi_{l,p}(t).$$

Si  $l \geq 0$ , en posant  $p = 2^l m + r$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
\phi_{l+1,n}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}[n - 2^{l+1}m - 2r] \phi_{l,2^l m + r}(t) \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}[n - 2^{l+1}m - 2r] \chi_{l,2^l m + r}(t) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{h}_{l+1}[n - 2r] \phi_{l,r}(t) + \sum_{r \in \mathbb{Z}[2^l]} \tilde{g}_{l+1}[n - 2r] \chi_{l,r}(t).
\end{aligned}$$

**Démonstration de la proposition 4.12 (p. 93) :** Ceci est une simple conséquence du fait que la fonction d'échelle non périodisée  $\phi$  partitionne l'unité (cfr. (B.10)). En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \hat{\psi}_{l,0}^a(a_j r_{\theta_n}^{-1} \vec{k}) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \hat{\psi}_{l,n}^a(a_j \vec{k}) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \rho(a_j k) \varphi_{l,0}(\kappa - n \frac{2\pi}{2^l}) \\
&= c \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \Phi_{l,0}(t - \frac{n}{2^l}) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} c \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}[2^l]} \phi(2^l t + 2^l m - n) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} c \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(2^l t + m) \\
&= 2^{\frac{l}{2}} c,
\end{aligned}$$

en posant  $t = \frac{\kappa}{2\pi}$ .

**Démonstration de la proposition 4.14 (p. 108) :** Etant donné une ondelette sphérique admissible, la relation (1.64) nous indique que la SCWT d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  s'exprime en Fourier selon

$$W_f(\omega, a) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, 0) Y_l^m(\omega).$$

Développons la quantité centrale de l'encadrement (4.152) en fonction de ce résultat :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \int_{S^2} d\mu(\omega) |W_f(\omega, a_j)|^2 \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \sum_{(l,k) \in \mathcal{N}} \sum_{(l',k') \in \mathcal{N}} \frac{4\pi}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \hat{f}(l, k) \hat{f}^*(l', k') \\
&\quad \hat{\psi}_{a_j}^*(l, 0) \hat{\psi}_{a_j}(l', 0) \int_{S^2} d\mu(\omega) Y_l^k(\omega) Y_{l'}^{k'*}(\omega) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \sum_{(l,k) \in \mathcal{N}} \frac{4\pi}{2l+1} |\hat{f}(l, k)|^2 |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2 \\
&= \sum_{(l,k) \in \mathcal{N}} |\hat{f}(l, k)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{4\pi}{2l+1} \nu_j |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2,
\end{aligned}$$

où nous avons employé l'orthonormalité des harmoniques sphériques

$$\langle Y_l^k | Y_{l'}^{k'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{kk'}.$$

Les bornes inférieure et supérieure de (4.152) sont donc bien définies s'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$A \leq \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2 \leq B,$$

pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration de la proposition 4.15 (p. 110) :** De la même manière que pour la démonstration précédente, étant donné une ondelette sphérique admissible, la relation (1.64) nous indique que la SCWT d'une fonction  $f \in L^2(S^2)$  s'exprime en Fourier selon

$$W_f(\omega, a) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, 0) Y_l^m(\omega).$$

En outre, la SCWT modifiée  $\tilde{W}_f(\omega, a) = \langle R_{[\omega]} L_{\psi}^{-1} D_a \psi | f \rangle$  devient de la même manière

$$\tilde{W}_f(\omega, a) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} G_\psi(l)^{-1} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, 0) Y_l^m(\omega),$$

puisque l'opérateur de repère ne dépend que de  $l$  et commute avec les rotations.

En développant la partie centrale de l'encadrement (4.162) en fonction de ce résultat, nous trouvons aisément

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j \int_{S^2} d\mu(\omega) W_f(\omega, a_j) \tilde{W}_f(\omega, a) \\ &= \sum_{(l,k) \in \mathcal{N}} |\hat{f}(l, k)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{4\pi}{2l+1} G_\psi(l)^{-1} \nu_j |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2, \end{aligned}$$

en employant l'orthonormalité des harmoniques sphériques.

L'équation (4.162) est donc encadrée s'il existe deux constantes  $A, B \in \mathbb{R}_+^*$  telles que

$$A \leq \frac{4\pi}{2l+1} G_\psi(l)^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2 \leq B,$$

pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration de la proposition 4.17 (p. 116) :** Définissons la somme

$$S = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \nu_j w_{jp} W_f(\omega_{jpp}, a_j) \tilde{W}_f^*(\omega_{jpp}, a_j).$$

Puisque

$$W_f(\omega, a) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, 0) Y_l^m(\omega)$$

et

$$\tilde{W}_f(\omega, a) = \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} G_\psi(l)^{-1} \hat{f}(l, m) \hat{\psi}_a^*(l, 0) Y_l^m(\omega),$$

nous avons

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{(l',m') \in \mathcal{N}} \frac{4\pi}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \hat{f}(l, m) \hat{f}^*(l', m') \\ &\quad \nu_j w_{jp} G_\psi^{-1}(l) \hat{\psi}_{a_j}^*(l, 0) \hat{\psi}_{a_j}(l', 0) Y_l^m(\omega_{j pq}) Y_{l'}^{m'*}(\omega_{j pq}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} 4\pi \nu_j \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} \sum_{(l',m') \in \mathcal{N}} \frac{\hat{f}(l, m) \hat{f}^*(l', m')}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} G_\psi^{-1}(l) \hat{\psi}_{a_j}^*(l, 0) \hat{\psi}_{a_j}(l', 0) \\ &\quad \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{jp} Y_l^k(\omega_{j pq}) Y_{l'}^{k'*}(\omega_{j pq}). \end{aligned}$$

Si  $l + l' < \beta_j$ , l'ordre du produit  $Y_l^m Y_{l'}^{m'*}$  étant égal à  $l + l'$  [Vil69], les poids  $w_{jp}$  réalise la quadrature [Boy89, DH94]

$$\sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{jp} Y_l^m(\omega_{j pq}) Y_{l'}^{m'*}(\omega_{j pq}) = \int_{S^2} d\mu(\omega) Y_l^m(\omega) Y_{l'}^{m'*}(\omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.12})$$

pour tout  $|m| \leq l$  et tout  $|m'| \leq l'$ .

La somme  $S$  se scinde par conséquent en deux parties

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \sum_{\substack{(l,m) \in \mathcal{N} \\ (l',m') \in \mathcal{N} \\ l+l' < 2\beta_j}} \dots + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} \sum_{\substack{(l,k) \in \mathcal{N} \\ (l',m') \in \mathcal{N} \\ l+l' \geq 2\beta_j}} \dots \\ &= C + D. \end{aligned}$$

La première partie  $C$ , où (A.12) est valide, se réduit à

$$\begin{aligned} C &= \sum_{j \in \mathbb{N}} 4\pi \nu_j \sum_{\substack{(l,m) \in \mathcal{N} \\ l < \beta_j}} \frac{1}{(2l+1)} |\hat{f}(l, m)|^2 G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2 \\ &= \sum_{(l,m) \in \mathcal{N}} |\hat{f}(l, m)|^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{4\pi \nu_j}{(2l+1)} \mathbb{1}_{[0, \beta_j[}(l) G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)|^2. \end{aligned}$$

Si l'équation (4.182) est satisfaite, alors

$$K_0 \|f\|^2 \leq C \leq K_1 \|f\|^2. \quad (\text{A.13})$$

Développons maintenant la partie  $D$ . Puisque  $Y_l^m(\omega_{j_p q}) = Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) e^{i m \varphi_{j_p q}}$ , avec  $\theta_{j_p} = \frac{2p+1}{4\beta_j} \pi$  et  $\varphi_{j_p q} = \frac{q\pi}{\beta_j}$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
& \sum_{q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} Y_l^m(\omega_{j_p q}) Y_{l'}^{*m'}(\omega_{j_p q}) \\
&= Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) Y_{l'}^{*m'}(\theta_{j_p}, 0) \sum_{q \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} e^{i(m-m') \frac{q\pi}{\beta_j}} \\
&= 2\beta_j Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) Y_{l'}^{*m'}(\theta_{j_p}, 0) \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ |m+2t\beta_j| \leq l'}} \delta_{m', m+2t\beta_j} \\
&= 2\beta_j \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ |m+2t\beta_j| \leq l'}} Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) Y_{l'}^{*m+2t\beta_j}(\theta_{j_p}, 0) \delta_{m', m+2t\beta_j} \\
&= 2\beta_j \sum_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[-l', l']}(m+2t\beta_j) Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) Y_{l'}^{*m+2t\beta_j}(\theta_{j_p}, 0) \delta_{m', m+2t\beta_j}
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{j \in \mathbb{N}} 8\pi \nu_j \beta_j \sum_{(l, m) \in \mathcal{N}} \sum_{l' \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{1}_{[2\beta_j, +\infty[}(l+l') \mathbb{1}_{[-l', l']}(m+2t\beta_j)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \hat{f}(l, m) \hat{f}^*(l', m+2t\beta_j) \\
&\quad G_\psi^{-1}(l) \hat{\psi}_{a_j}^*(l, 0) \hat{\psi}_{a_j}(l', 0) \sum_{p \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{j_p} Y_l^m(\theta_{j_p}, 0) Y_{l'}^{*m+2t\beta_j}(\theta_{j_p}, 0).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|D| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} 8\pi \nu_j \beta_j \sum_{(l, m) \in \mathcal{N}} \sum_{l' \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{1}_{[2\beta_j, +\infty[}(l+l') \mathbb{1}_{[-l', l']}(m+2t\beta_j)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} |\hat{f}(l, m)| |\hat{f}^*(l', m+2t\beta_j)| \\
&\quad G_\psi(l)^{-1} |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)| |\hat{\psi}_{a_j}(l', 0)| \sum_{p \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{j_p} |Y_l^m(\theta_{j_p}, 0)| |Y_{l'}^{*m+2t\beta_j}(\theta_{j_p}, 0)| \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} 4\pi \nu_j \sum_{(l, m) \in \mathcal{N}} \sum_{l' \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(l, m)| |\hat{f}^*(l', m+2t\beta_j)| \mathbb{1}_{[-l', l']}(m+2t\beta_j) \\
&\quad \mathbb{1}_{[\beta_j, +\infty[}(l+l') G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)| |\hat{\psi}_{a_j}(l', 0)|
\end{aligned}$$

où nous avons employé le fait que  $|Y_l^m| \leq \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$  pour tout  $(l, m) \in \mathcal{N}$ , et que  $\sum_{p \in \mathbb{Z}[2\beta_j]} w_{j_p} = \frac{4\pi}{2\beta_j}$ .

Les sommes en  $m$  et  $t$  peuvent être bornées puisque

$$\begin{aligned}
& \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)| |\hat{f}(l', m + 2t\beta_j)| \mathbb{1}_{[-l', l']}(m + 2t\beta_j) \\
& \leq \sum_{t \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \mathbb{1}_{[-l', l']}(m + 2t\beta_j) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l', m + 2t\beta_j)|^2 \mathbb{1}_{[-l', l']}(m + 2t\beta_j) \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \mathbb{1}_{[-l', l']}(m + 2t\beta_j) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l', m + 2t\beta_j)|^2 \mathbb{1}_{[-l', l']}(m + 2t\beta_j) \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \left[ \frac{2l' + 1}{2\beta_j} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{m' = -l + 2t\beta_j}^{l + 2t\beta_j} |\hat{f}(l', m')|^2 \mathbb{1}_{[-l', l']}(m') \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \left[ \frac{2l' + 1}{2\beta_j} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(l', m')|^2 \mathbb{1}_{[-l, l]}(m' - 2t\beta_j) \mathbb{1}_{[-l', l']}(m') \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \left[ \frac{2l' + 1}{2\beta_j} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{m' = -l'}^{l'} |\hat{f}(l', m')|^2 \mathbb{1}_{[-l, l]}(m' - 2t\beta_j) \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \left[ \frac{2l' + 1}{2\beta_j} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{|m'| \leq l'} |\hat{f}(l', m')|^2 \left[ \frac{2l + 1}{2\beta_j} + 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq (2\beta_j)^{-1} (2(l + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}} (2(l' + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{|m'| \leq l'} |\hat{f}(l', m')|^2 \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz premièrement sur la sommation en  $m$  et ensuite sur celle en  $t$ . Dès lors,

$$|D| \leq \sum_{l, l' \in \mathbb{N}} \left[ \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{|m'| \leq l'} |\hat{f}(l', m')|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \chi(l, l')$$

avec

$$\chi(l, l') = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2\pi\nu_j c_j(l, l')}{\beta_j} \mathbb{1}_{[2\beta_j, +\infty[}(l + l') G_\psi^{-1}(l) |\hat{\psi}_{a_j}(l, 0)| |\hat{\psi}_{a_j}(l', 0)|.$$

et  $c_j(l, l') = (2(l + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}} (2(l' + \beta_j) + 1)^{\frac{1}{2}}$ .

En posant  $F_l^2 = \sum_{|m| \leq l} |\hat{f}(l, m)|^2$ , nous obtenons à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|D| & \leq \sum_{l \in \mathbb{N}} F_l \sum_{l' \in \mathbb{N}} \chi(l, l') F_{l'} \\
& \leq \|F\| \|\mathcal{X}F\| \\
& = \|f\| \|\mathcal{X}F\|,
\end{aligned}$$

avec  $F = (F_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $\|F\|^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} |F_l|^2 = \|f\|^2$ ,  $\mathcal{X} = (\chi(l, l'))_{l, l' \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{X}F)_l = \sum_{l' \in \mathbb{N}} \chi(l, l') F_{l'}$ .  
 Si (4.182) est vérifiée, nous avons

$$|D| \leq \|f\| \|\mathcal{X}\| \|f\| = \delta \|f\|^2,$$

avec la norme

$$\|\mathcal{X}\| = \sup_{(G_l)_{l \in \mathbb{N}}} \frac{\|\mathcal{X}G\|}{\|G\|}.$$

La preuve de la proposition découle alors du fait que

$$0 < (K_0 - \delta)\|f\|^2 < C - |D| \leq S \leq C + |D| < (K_1 + \delta)\|f\|^2 < \infty.$$

# Annexe B

## Transformée en ondelettes discrète

Cette annexe présente les principaux aspects de la transformée en ondelettes discrète en introduction aux repères d'ondelettes multisélectifs présentés au chapitre 4.

### B.1 Analyse multirésolution

Le principe de base d'une analyse multirésolution est de séparer les constituants d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en niveaux de résolution. Mathématiquement, ce principe se fonde sur la définition suivante [Dau92, Mal98, JS94].

**Définition B.1.** *Un ensemble d'espaces (ou approximations)  $\{V_l \in L^2(\mathbb{R}) : l \in \mathbb{Z}\}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  si les six propriétés suivantes sont respectées*

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad V_l \subset V_{l+1}, \quad (\text{B.1a})$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} V_l = \overline{\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} V_l} = L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{B.1b})$$

$$\lim_{l \rightarrow -\infty} V_l = \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} V_l = \{\mathbf{0}\}, \quad (\text{B.1c})$$

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad f(t) \in V_l \Leftrightarrow f(2t) \in V_{l+1}, \quad (\text{B.1d})$$

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t+1) \in V_0, \quad (\text{B.1e})$$

*Il existe une fonction d'échelle  $\phi \in V_0$  de moyenne non nulle t.q.  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .* (B.1f)

La première propriété indique que l'espace contenant les fonctions d'une *résolution*  $l+1$  contient les espaces associés aux résolutions inférieures. Ceci définit une suite d'espaces imbriqués :

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \quad (\text{B.2})$$

La seconde propriété garantit que l'espace avec un résolution infinie est l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  tout entier. En sens inverse, et c'est le sens de (B.1c), la fonction avec la plus basse résolution est la fonction identiquement nulle.

Le quatrième point stipule que pour augmenter la résolution d'une fonction  $f$  il suffit de la contracter d'un facteur 2. En outre, en considérant cette propriété et le point (B.1e), la translation d'un facteur entier de cette même fonction ne modifie pas sa résolution.

Finalement, il est demandé que l'espace  $V_0$  contienne une base de Riesz  $\{\phi_n(t) = \phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Autrement dit, cette famille doit être constituée d'éléments linéairement indépendants<sup>1</sup> et il doit exister deux constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles pour tout  $g \in V_0$ ,

$$A \|g\|_2^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f | \phi_n \rangle|^2 \leq B \|g\|_2^2. \quad (\text{B.3})$$

Les propriétés (B.1d) et (B.1f) impliquent que, pour chaque  $l \in \mathbb{Z}$ , la famille  $\{\phi_{l,n}(t) = 2^{\frac{l}{2}} \phi(2^l t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  est une base de Riesz de l'espace  $V_l$ .

A chaque espace  $V_l$  correspond un espace complémentaire  $W_l$  tel que

$$V_{l+1} = V_l \oplus W_l, \quad (\text{B.4})$$

où  $\oplus$  représente la somme directe de deux espaces.

Chaque espace  $W_l$  contient les *détails* nécessaires pour obtenir un espace de résolution plus fine ( $V_{l+1}$ ) à partir d'un espace à résolution inférieure ( $V_l$ ).

Nous pouvons montrer [Dau92, Mal98] que la suite d'espaces

$$\dots \subset W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \quad (\text{B.5})$$

génère également une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  à l'aide d'une *ondelette*  $\chi$  telle que, pour chaque  $l \in \mathbb{Z}$ , la famille  $\{\chi_{l,n}(t) = 2^{\frac{l}{2}} \chi(2^l t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  est une base de Riesz de  $W_l$ .

Etant donné l'inclusion de  $V_0$  dans  $V_1$  et de  $W_0$  dans  $V_1$ , les fonctions  $\phi$  et  $\chi$  satisfont les *équations d'échelle* suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \phi(t - n), \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \chi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] \phi(t - n), \quad (\text{B.7})$$

où  $h$  et  $g$  sont des suites discrètes dans  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Par le théorème de convolution, ces relations deviennent en Fourier

$$\sqrt{2} \hat{\phi}(2\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\xi) \hat{\phi}(\xi) \quad (\text{B.8})$$

$$\sqrt{2} \hat{\chi}(2\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} G(\xi) \hat{\chi}(\xi), \quad (\text{B.9})$$

---

<sup>1</sup>Ce qui équivaut à dire que toute sous-famille finie de  $\phi_n$  contient des éléments linéairement indépendants.

avec  $H(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] e^{-in\xi}$  et  $G(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] e^{-in\xi}$ . Nous désignerons toujours par la suite la transformée de Fourier de toute suite  $s$  par sa majuscule  $S$ .

Pour terminer cette section, il est clair que l'ensemble des fonctions constantes est inclus à tous les espaces  $V_l$ . Par conséquent, il est assez naturel d'exiger que  $\phi$  réalise une *partition de l'unité*, c.-à-d.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(t - n) = 1. \quad (\text{B.10})$$

La décomposition d'une fonction constante sera donc réalisée par des coefficients constants dans chaque espace  $V_l$ .

## B.2 Schéma orthogonal

Dans une analyse multirésolution orthogonale, il faut

$$W_0 \perp V_0, \quad (\text{B.11})$$

ou de manière équivalente que

$$\langle \phi | \chi(\cdot - n) \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.12})$$

Par conséquent, chaque  $W_l$  est le complément orthogonal de  $V_l$  dans  $V_{l+1}$ , de sorte que

$$L^2(\mathbb{R}) = V_L + \bigoplus_{l=L}^{\infty} W_l = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} W_l, \quad (\text{B.13})$$

pour  $L \in \mathbb{Z}$ . En outre, tous les  $W_l$  sont mutuellement orthogonaux et

$$\langle \chi_{l,n} | \chi_{l',n'} \rangle = 0, \quad (\text{B.14})$$

si  $l \neq l'$ .

Si les familles  $\{\phi(t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\chi(t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  sont des bases orthogonales, respectivement de  $V_0$  et  $W_0$ , nous avons les relations d'orthogonalité suivantes

$$\langle \chi_{l,n} | \chi_{l',n'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{nn'}, \quad (\text{B.15a})$$

$$\langle \phi_{l,n} | \phi_{l',n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad (\text{B.15b})$$

$$\langle \chi_{l,n} | \phi_{l',n'} \rangle = 0, \quad \text{si } l > l', \quad (\text{B.15c})$$

pour tout  $l, l', n, n' \in \mathbb{Z}$ .

Ces relations permettent également de déterminer les suites  $h$  et  $g$  données en (B.6) et (B.7) avec

$$h[n] = \langle \phi_{-1,0} | \phi_{0,n} \rangle \quad (\text{B.16})$$

$$g[n] = \langle \chi_{-1,0} | \phi_{0,n} \rangle. \quad (\text{B.17})$$

En outre, puisque  $V_{l+1} = V_l \oplus W_l$ , il est facile de montrer que

$$\phi_{l+1,n}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[n - 2p] \phi_{l,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[n - 2p] \chi_{l,p}(t), \quad (\text{B.18})$$

puisque  $\phi_{l+1,n} \in V_{l+1}$ .

En réalité, si  $H$  respecte certaines hypothèses de régularité [Mal98], les équations (B.8) et (B.9) permettent de montrer qu'il détermine complètement  $\phi$  et  $\chi$  à l'aide des relations

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{H(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{\chi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{G(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.20})$$

et en prenant  $G(\xi) = e^{-i\xi} H^*(\xi + \pi)$ . Ce choix revient à définir  $g$  par

$$g[n] = (-1)^n h^*[1 - n]. \quad (\text{B.21})$$

Les propriétés de  $H$  déterminent ainsi celles des fonctions  $\phi$  et  $\chi$ . Notons par exemple que si les  $p - 1$  dérivées de  $H$  sont nulles en  $\xi = \pi$ , l'ondelette  $\chi$  aura  $p$  moments nuls.

A l'aide d'une analyse multirésolution orthogonale, toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut être décomposée en une somme d'approximations et de détails successifs. Pour  $L \in \mathbb{Z}$  fixé, la décomposition (B.13) implique que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_L[n] \phi_{L,n}(t) + \sum_{l=L}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_l[n] \chi_{l,n}(t) \quad (\text{B.22})$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_l[n] \chi_{l,n}(t), \quad (\text{B.23})$$

avec  $c_l[n] = \langle \phi_{l,n} | f \rangle$  et  $d_l[n] = \langle \chi_{l,n} | f \rangle$ , respectivement les coefficients d'approximation et de détails de  $f$  à l'échelle  $l$ .

Les équations d'échelles (B.6) et (B.7) permettent de trouver des relations de récurrence entre ces coefficients. Les coefficients d'approximation et de détail à une résolution  $l$  s'obtiennent par exemple à partir des coefficients d'approximation à la résolution  $l + 1$  grâce aux relations

$$c_l[n] = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} h[n' - 2n] c_{l+1}[n'] = \bar{h} * c_{l+1}[2n] \quad (\text{B.24})$$

$$d_l[n] = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} g[n' - 2n] c_{l+1}[n'] = \bar{g} * c_{l+1}[2n], \quad (\text{B.25})$$

où  $\bar{s}[n] = s^*[-n]$  pour toute suite discrète  $s$ , et

$$u * v[n] = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} u[n - n'] v[n'], \quad (\text{B.26})$$

est la convolution entre deux suites discrètes  $s$  et  $u$ .

En sens inverse, la reconstruction (B.18) donne la règle

$$c_{l+1}[n] = h * \tilde{c}_l[n] + g * \tilde{d}_l[n], \quad (\text{B.27})$$

où  $\tilde{s}$  est l'opération de sur-échantillonnage d'une suite  $s$  telle que

$$\tilde{s}[n] = \begin{cases} s[\frac{n}{2}] & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Ces relations de récurrence permettent d'obtenir des algorithmes rapides pour le calcul des coefficients en ondelettes et pour la reconstruction de  $f$ .

## B.3 Schéma biorthogonal

Une analyse multirésolution orthogonale est généralement assez peu flexible pour la construction d'ondelettes et de fonctions d'échelles. Hormis les ondelettes de Haar, il est par exemple impossible d'obtenir des  $\phi$  et  $\chi$  réels, symétriques et à supports compacts [JS94, Dau88].

Il est donc commode de travailler avec un schéma plus souple en relachant les conditions d'orthogonalité (B.15). C'est le schéma *biorthogonal*.

Deux nouveaux espaces  $\tilde{V}_l$  et  $\tilde{W}_l$ , nommés *espaces d'approximation et de détails duaux*, sont introduits de telle sorte que

$$W_l \perp \tilde{V}_l \quad \text{et} \quad \tilde{W}_l \perp V_l. \quad (\text{B.29})$$

Ceci implique aussi que

$$W_l \perp \tilde{W}_{l'}, \quad \forall l \neq l'. \quad (\text{B.30})$$

Les espaces  $\tilde{V}_l$  et  $\tilde{W}_l$  sont liés à deux nouvelles analyses multirésolution, non nécessairement équivalentes à celles représentées par les espaces  $V_l$  et  $W_l$ , et tels que

$$\tilde{V}_{l+1} = \tilde{V}_l \oplus \tilde{W}_l. \quad (\text{B.31})$$

Associées à celles-ci, existent deux fonctions  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$  telles que les familles  $\{\tilde{\phi}_{l,n}(t) = 2^{\frac{l}{2}}\tilde{\phi}(2^l t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\tilde{\chi}_{l,n}(t) = 2^{\frac{l}{2}}\tilde{\chi}(2^l t - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  sont des bases de Riesz respectivement de  $\tilde{V}_l$  et de  $\tilde{W}_l$ .

Il faut en outre que

$$\langle \phi | \tilde{\phi}(\cdot - n) \rangle = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\langle \chi | \tilde{\chi}(\cdot - n) \rangle = 0 \quad (\text{B.33})$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

A l'aide des relations (B.29) et (B.30), nous obtenons les relations de biorthogonalité suivantes :

$$\langle \tilde{\chi}_{l,n} | \chi_{l',n'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{nn'} \quad (\text{B.34a})$$

$$\langle \tilde{\phi}_{l,n} | \phi_{l',n'} \rangle = \delta_{nn'} \quad (\text{B.34b})$$

$$\langle \tilde{\chi}_{l,n} | \phi_{l',n'} \rangle = 0 \quad (\text{B.34c})$$

$$\langle \tilde{\phi}_{l,n} | \chi_{l',n'} \rangle = 0, \quad (\text{B.34d})$$

pour tout  $l, l', n, n' \in \mathbb{Z}$ .

Puisque  $\tilde{V}_0$  et  $\tilde{W}_0$  sont deux sous-espaces de  $\tilde{V}_1$ ,  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$  vérifient également deux équations d'échelles,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\phi}\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}[n] \tilde{\phi}(2t - n), \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\chi}\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}[n] \tilde{\phi}(2t - n), \quad (\text{B.36})$$

où  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  sont des suites discrètes dans  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Par les relations de biorthogonalité (B.34), les *filtres*  $h$ ,  $g$ ,  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  sont déterminés par les relations

$$\begin{aligned} h[n] &= \langle \phi_{-1,0} | \tilde{\phi}_{0,n} \rangle, & g[n] &= \langle \chi_{-1,0} | \tilde{\phi}_{0,n} \rangle, \\ \tilde{h}[n] &= \langle \tilde{\phi}_{-1,0} | \phi_{0,n} \rangle, & \tilde{g}[n] &= \langle \tilde{\chi}_{-1,0} | \phi_{0,n} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  satisfont deux nouvelles formules de reconstruction

$$\phi_{l+1,n}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{h}[n - 2p] \phi_{l,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{g}[n - 2p] \chi_{l,p}(t), \quad (\text{B.38})$$

$$\tilde{\phi}_{l+1,n}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[n - 2p] \tilde{\phi}_{l,p}(t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[n - 2p] \tilde{\chi}_{l,p}(t), \quad (\text{B.39})$$

en remarquant que  $\phi_{l+1,n} \in V_{l+1} = V_l \oplus W_l$  (resp.  $\tilde{\phi}_{l+1,n} \in \tilde{V}_{l+1} = \tilde{V}_l \oplus \tilde{W}_l$ ) et en employant les relations de biorthogonalité (B.34).

Comme dans le cas orthogonal,  $H(\xi)$  et  $\tilde{H}(\xi)$  déterminent univoquement les fonctions  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\chi}$  à l'aide de (B.19), (B.20) et des relations

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.40})$$

$$\hat{\chi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{G}(2^{-p}\xi)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.41})$$

où cette fois  $G(\xi) = e^{-i\xi} \tilde{H}^*(\xi + \pi)$  et  $\tilde{G}(\xi) = e^{-i\xi} H^*(\xi + \pi)$ . Ceci équivaut à la création des filtres

$$g[n] = (-1)^n \tilde{h}^*[1 - n] \quad \text{et} \quad \tilde{g}[n] = (-1)^n h^*[1 - n]. \quad (\text{B.42})$$

Comme dans le cas orthogonal, toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut être reconstruite à l'aide de ses coefficients

$$\begin{aligned} c_l[n] &= \langle \phi_{l,n} | f \rangle, & d_l[n] &= \langle \chi_{l,n} | f \rangle, \\ \tilde{c}_l[n] &= \langle \tilde{\phi}_{l,n} | f \rangle, & \tilde{d}_l[n] &= \langle \tilde{\chi}_{l,n} | f \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

selon les formules de synthèse suivantes pour un certain  $L \in \mathbb{Z}$  fixé

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_L[n] \tilde{\phi}_{L,n}(t) + \sum_{l=L}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_l[n] \tilde{\chi}_{l,n}(t) \quad (\text{B.44})$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_l[n] \tilde{\chi}_{l,n}(t), \quad (\text{B.45})$$

où le symbole  $\sim$  peut être échangé entre les coefficients et les fonctions de reconstruction.

Les règles de récurrence (B.24) et (B.25) que respectent les coefficients  $c_l$  et  $d_l$  restent valables. Cependant, la reconstruction (B.27) est un peu modifiée par l'emploi des filtres duaux  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$  au sein de (B.38), comme le montre la formule suivante

$$c_{l+1}[n] = \tilde{h}^* * \tilde{c}_l[n] + \tilde{g}^* * \tilde{d}_l[n]. \quad (\text{B.46})$$

## B.4 Exemples de bases d'ondelettes

Il existe de nombreuses bases d'ondelettes orthogonales. Citons par exemple les ondelettes de Meyer, celles de Daubechies minimisant la taille de leur support pour un nombre de moments nuls fixé, les Symmlets se rapprochant d'une base orthogonal à support compact et symétrique par rapport à l'origine, . . . Toutes celles-ci sont décrites notamment en [Dau92, Dau88, Mal98].

Nous nous attarderons uniquement dans cette section à la présentation d'une base biorthogonale d'ondelettes employée dans la construction d'un repère d'ondelettes multisélectif (Sec. 4.4).

Cette base est issue des résultats de Cohen-Daubechies-Feauveau [CDF92] dans le cadre de la création d'une base biorthogonale d'ondelettes splines [UA92] à support compact et avec un nombre donné de moments nuls.

Une fonction *B-spline*  $\beta_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  est définie de la manière suivante :

$$\beta_n(t) = \beta_{n-1} * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^0 \quad (\text{B.47a})$$

$$\beta_0(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t). \quad (\text{B.47b})$$

L'ordre  $n$  définit la régularité de cette fonction. Ainsi,  $\beta_n$  sera  $n$  fois continûment différentiable sur  $\mathbb{R}$ , c.-à-d.  $\beta_n \in C^n(\mathbb{R})$ .

Cette fonction vérifie une autre règle de récurrence

$$\beta_n(t) = t\beta_{n-1}(t) + (n-t)\beta_{n-1}(t-1). \quad (\text{B.48})$$

En outre, elle fournit une partition de  $\mathbb{R}$ , c.-à-d.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_n(t - k) = 1, \quad (\text{B.49})$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

$n$	$h[n]$	$\tilde{h}[n]$
0, 1	0.53033008588991	0.95164212189718
-1, 2	0.17677669529664	-0.02649924094535
-2, 3		-0.30115912592284
-3, 4		0.03133297870736
-4, 5		0.07466398507402
-5, 6		-0.01683176542131
-6, 7		-0.00906325830378
-7, 8		0.00302108610126

TAB. B.1 – Filtres direct et dual de Cohen-Daubechies-Feauveau associés respectivement à  $p = 3$  et  $p = 7$  moments nuls.

Soit la fonction d'échelle  $\phi = \beta_{p-1}$ . Par le théorème de convolution,

$$\hat{\phi}(\xi) = e^{-i \frac{\epsilon \xi}{2}} \left( \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^p,$$

avec  $\epsilon = 1$  pour  $p$  pair et  $\epsilon = 0$  pour  $p$  impair.

A celle-ci correspond le filtre

$$H(\xi) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\epsilon \xi}{2}} \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^p. \quad (\text{B.50})$$

$H(\xi)$  ayant  $p - 1$  dérivées nulles en  $\xi = \pi$ , l'ondelette duale  $\tilde{\chi}$  déterminée par (B.41) aura  $p$  moments nuls.

Pour obtenir une ondelette  $\chi$  avec  $\tilde{p}$  moments nuls, avec  $\tilde{p}$  de même parité que  $p$ , un filtre  $\tilde{H}$  de longueur minimale est obtenu par [CDF92, Mal98]

$$\tilde{H}(\xi) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\epsilon \xi}{2}} \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^{\tilde{p}} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1+k}{k} \left( \sin \frac{\xi}{2} \right)^{2k}, \quad (\text{B.51})$$

avec  $q = \frac{1}{2}(p + \tilde{p})$ . En outre, les supports des ondelettes  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  sont minimaux et ont une taille égale à  $p + \tilde{p} - 1$ . La table B.1 présente les filtres  $h$  et  $\tilde{h}$  pour  $p = 3$  et  $\tilde{p} = 7$ . Les fonctions  $\phi$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  sont affichées sur la Figure B.1.

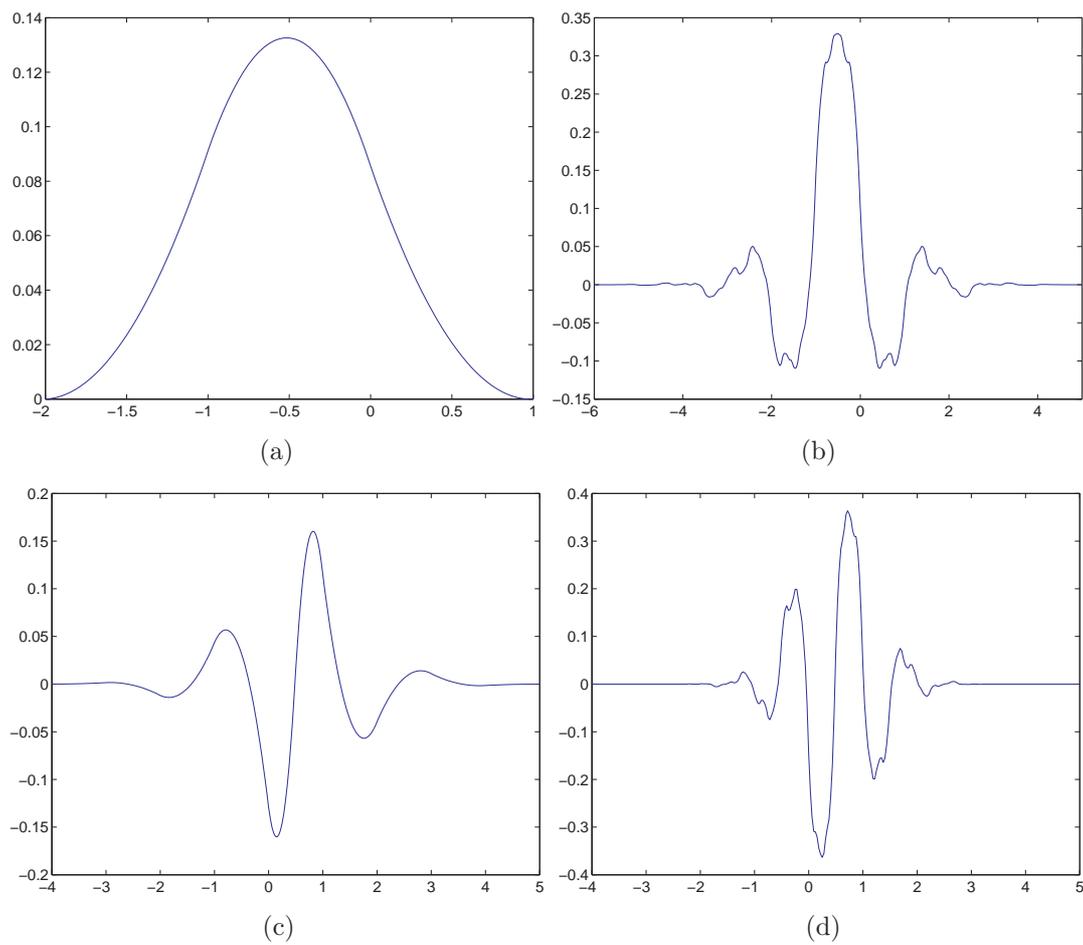


FIG. B.1 – Ondelettes et fonctions d'échelles directes et duales pour la base biorthogonale de Cohen-Daubechies-Feauveau ( $p = 3, \tilde{p} = 7$ ). (a)  $\phi$ . (b)  $\tilde{\phi}$ . (c)  $\chi$ . (d)  $\tilde{\chi}$ .



# Annexe C

## La toolbox YAWTb : Yet Another Wavelet Toolbox $\square$

### C.1 Historique

Depuis une dizaine d'années, les membres de l'Institut de Physique Théorique de l'UCL travaillant dans le domaine de l'analyse par ondelettes ont conçu une multitude de programmes informatiques. Ceux-ci ont été créés sous divers langages (Fortran, C/C++, Java, Matlab $\text{\textcircled{C}}$ , Mathematica $\text{\textcircled{C}}$ , etc. ) pour réaliser entre autres :

- des algorithmes de transformées en ondelettes discrètes, discrétisées (repères) et continues, sur la droite, le plan, la sphère [AV99], à trois dimensions, dans le domaine spatio-temporel [DM93], . . . , ainsi que des optimisations rapides de ceux-ci [VG02] ;
- des méthodes exploitant ces algorithmes à des fins diverses : reconnaissance automatique de caractères [AVB95] ou de formes [ABJ97] dans des images, détection de symétries cachées dans des motifs quasipériodiques et fractaux [AJV99], étude de spectres RMN<sup>1</sup> et suppression de pics de solvants [AC01], . . . ;
- des exercices pédagogiques destinés à l'enseignement du traitement de signaux et de l'analyse par ondelettes 1D et 2D.

En décembre 2000, A. Coron, L. Jacques, A. Rivoldini, P. Vandergheynst, rejoints ensuite par L. Demanet, décidèrent de mettre sur pied un projet de *boîte à outils* (ou *toolbox*) Matlab. L'objectif était double : écrire une fois pour toutes les procédures fondamentales de transformées en ondelettes et fournir librement<sup>2</sup> à la communauté scientifique un ensemble de méthodes permettant la reproductivité des recherches réalisées dans l'institut. Le projet YAWTb, pour *Yet Another Wavelet ToolBox*, était donc né.

---

<sup>1</sup>Résonance Magnétique Nucléaire.

<sup>2</sup>Autrement dit, sous la license GPL [Gpl]. Celle-ci permet entre autres, la libre modification du code, la réutilisation de la toolbox dans d'autres projets GPL, et une protection juridique en cas de "vol" de méthodes à des fins commerciales.

## C.2 Description

La toolbox YAWTb contient actuellement des programmes réalisant

- des transformées continues en ondelettes 1D, 1D+temps (spatio-temporelle), 2D, 3D et sphérique ;
- des décompositions de signaux en repères d'ondelettes sur le plan et la sphère ;
- du débruitage d'images à partir de repères d'ondelettes directionnelles ;
- divers utilitaires facilitant le traitement de données sous Matlab.

Elle est en outre écrite de manière modulaire afin de pouvoir intégrer facilement de nouvelles techniques de traitement de signaux. La plupart des programmes sont écrits dans le langage Matlab. Toutefois, certaines procédures ont été réalisées en C lorsque l'optimisation des algorithmes était nécessaire. Dans le cas de la transformée en ondelettes sphériques, la toolbox a été interfacée avec la bibliothèque *SpharmonicKit* [SK] pour bénéficier d'une transformée de Fourier rapide sur la sphère.

Afin de faciliter l'utilisation de la YAWTb, deux règles ont été fixées. Premièrement, tout programme dans cette toolbox contient, d'une part, une aide propre écrite en  $\LaTeX$  et consultable dans Matlab (routine *yahelp*), et d'autre part, un code de démonstration donnant un exemple d'utilisation du programme (routine *yademo*). Ces informations sont en outre intégrées automatiquement au sein d'un fichier de documentation global disponible aux formats HTML, Postscript et PDF.

Deuxièmement, la visualisation des différentes transformées décrites ci-dessus est réalisée au moyen d'une routine unique (*yashow*). Lors d'une utilisation simple de la toolbox, c'est donc cette dernière qui gère la manière dont sont affichés ses résultats, et non l'utilisateur final.

## C.3 Liens

La toolbox YAWTb est décrites sur les sites web suivants

- <http://www.fyma.ucl.ac.be/projects/yawtb>
- <http://www.yawtb.be.tf>

Ces derniers contiennent de plus amples informations sur les listes de diffusions disponibles, l'usage de la toolbox, sa documentation, etc.

# Bibliographie

- [AAB95] A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, and J.-F. Musy. *Ondelettes, Multifractales et Turbulences : de l'ADN aux Croissances Cristalline*. Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1995.
- [AAG93] S. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. “Continuous frames in Hilbert space.” *Annals of Physics*, **222** :1–37, 1993.
- [AAG00] S. T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets, and their Generalizations*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [ABJ97] J.-P. Antoine, D. Barache, R.M. Cesar Jr., and L. da F. Costa. “Shape Characterization with the Wavelet Transform.” *Signal Processing*, **62**(3) :265–290, 1997.
- [AC01] J.-P. Antoine and A. Coron. “Time-frequency and time-scale approach to magnetic resonance spectroscopy.” *J. of Computational Methods in Science and Engineering*, **1** :327–352, 2001.
- [ADH02] J.-P. Antoine, L. Demanet, J.-F. Hochedez, L. Jacques, R. Terrier, and E. Verwichte. “Application of the 2-D wavelet transform to astrophysical images.” *Physicalia Magazine*, **24** :93–116, 2002.
- [ADJ01] J.-P. Antoine, L. Demanet, L. Jacques, and P. Vandergheynst. “Wavelets on the sphere : Implementation and approximations.” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **13** :177–200, 2001.
- [AJ03a] J.-P. Antoine and L. Jacques. “Angular multiselectivity analysis of images.” In M.A.Unser (eds.) A.Aldroubi, A.F.Laine, editor, *Wavelets X, in Proc. SPIE*, volume 5207, pp. 196–207, San Diego, California, USA, August 2003.
- [AJ03b] J.-P. Antoine and L. Jacques. “Directional Wavelets and Curvature Radius Approximation.” In J.-P. Gazeau, R. Kerner, J.-P. Antoine, S. Metens, and J.-Y. Thibon, editors, *GROUP 24 : Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, pp. 899–904, Bristol, 2003. IOP Publishing.
- [AJT99] J.-P. Antoine, L. Jacques, and R. Twarock. “Wavelet analysis of a quasiperiodic tiling with fivefold symmetry.” *Physics Letter A*, **261** :265–274, 1999.

- [AJV99] J.-P. Antoine, L. Jacques, and P. Vandergheynst. “Penrose tilings, quasicrystals, and wavelets.” *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, Proc. SPIE*, **3813** :28–39, (1999).
- [AMV99] J.-P. Antoine, R. Murenzi, and P. Vandergheynst. “Directional wavelets revisited : Cauchy wavelets and symmetry detection in patterns.” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **6** :314–345, 1999.
- [AMV04] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S.T. Ali. *Two-dimensional Wavelets and Their Relatives*. Cambridge University Press, Cambridge (UK), 2004. (to appear).
- [Ant94] J.-P. Antoine. “Wavelet analysis : a new tool in signal processing.” *Physicalia Magazine*, 1994.
- [Ant96] J.-P. Antoine. “Symmetry-adapted wavelet analysis.” In P. Delogne, editor, *Proc. IEEE Intern. Conf. on Image Processing (ICIP-96), Lausanne, Sept. 96*, volume III, pp. 177–180. IEEE, 1996.
- [AV99] J.-P. Antoine and P. Vandergheynst. “Wavelets on the 2-sphere : a group theoretical approach.” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **7** :1–30, 1999.
- [AVB95] J.-P. Antoine, P. Vandergheynst, K. Bouyoucef, and R. Murenzi. “Alternative representations of an image via the 2D wavelet transform. Application to character recognition.” *Proc. SPIE*, **2488** :486–497, April (1995).
- [BCM99] M. Benoit, S. Comes, and M. Mattavelli. “Postprocessing of images by filtering the unmasked coding noise.” *IEEE Transactions on Image Processing*, **8**(8) :1050–1062, august 1999.
- [BE03] A. Bonami and A. Estrade. “Anisotropic analysis of some Gaussian models.” *Journ. of Fourier Anal. and Appl.*, 2003. to appear.
- [Bha99] S. K. Bhattacharjee. *A Computational Approach to Image Retrieval*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, 1999.
- [Bij99] A. Bijaoui. *Wavelet in Physics*, chapter Wavelet and astrophysical applications, pp. 77–115. Cambridge University Press, 1999.
- [Boy89] J. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Method*, volume 49 of *Lecture Notes in Engeneering*. Springer Verlag, NY, 1989.
- [BR95] A. Bijaoui and F. Ru. “A multiscale vision model adapted to astronomical images.” *Signal Processing*, **46** :229–243, 1995.
- [BSR96] A. Bijaoui, E. Slezak, F. Rue, and E. Lega. “Wavelets and the study of the Distant Universe.” In *Proceedings of the IEEE, Special Issue on Wavelets*, volume 84, pp. 670–678, 1996.

- [Bül02] T. Bülow. “Multiscale Image Processing on the Sphere.” In *DAGM-Symposium*, pp. 609–617, 2002.
- [CC60] C.W. Clenshaw and A.R. Curtis. “A method for numerical integration on an automatic computer.” *Numerische Mathematik*, **2** :197–205, 1960.
- [CD99] E. Candès and D. Donoho. “Curvelets : A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges.” In *Curve and Surface Fitting*, Nashville, 1999. TN. eds. L. L. Schumaker et al., Vanderbilt University.
- [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau. “Biorthogonal bases of compactly supported wavelets.” *Comm. Pure Appl. Math.*, **45** :485–560, 1992.
- [CF97] J. Cui and W. Freeden. “Equidistribution on the sphere.” *SIAM J. Sci. and Stat. Comp.*, **18** :595–609, (1997).
- [CM91] R. R. Coifman and Y. Meyer. “Remarques sur l’analyse de Fourier a fenetre.” *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **312** :259–261, 1991.
- [CSB00] L. Cayón, J.L. Sanz, R.B. Barreiro, E. Martínez-González, P. Vielva, L. Toffolatti, J. Silk, J.M. Diego, and F. Argüeso. “Isotropic wavelet : a powerful tool to extract point sources from cosmic microwave background maps.” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **315** :757–761, 2000.
- [CSM01] L. Cayón, J.L. Sanz, E. Martínez-González, A.J. Banday, F. Argüeso, J.E. Gallegos, K.M. Gorski, and G. Hinshaw. “Spherical Mexican Hat wavelet : An application to detect non-Gaussianity in the COBE-DMR maps.” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **326** :12431249, 2001.
- [CYV00] G. Chang, B. Yu, and M. Vetterli. “Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression.” *IEEE Trans. Image Processing*, **9** :1532–1546, 2000.
- [Dan00] K. Daniilidis, editor. *IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, Hilton Head Island, June 12, 2000.
- [Dau88] I. Daubechies. “Orthogonal bases of compactly supported wavelets.” *Comm. Pure. Appl. Math.*, **41** :909–996, 1988.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [Def99] J.-M. Defise. *Analyse des Performances Instrumentales du Télescope Spatial EIT*. PhD thesis, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 1999.
- [DEG92] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, and B. Torrèsani. “Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis : Extraction of Instantaneous Frequencies.” *IEEE Trans. Inform. Theory.*, **38** :644–664, 1992.

- [Del95] J.-P. Delaboudinière et al. “EIT : Extreme-Ultraviolet Imaging Telescope for the SoHO Mission.” *Solar Physics*, **175** :291–312, 1995.
- [DGM86] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. “Painless nonorthogonal expansion.” *J. Math. Phys.*, **27** :1271–1283, 1986.
- [DH94] J.R. Driscoll and D. M. Healy. “Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere.” *Advances in Applied Mathematics*, **15** :202–250, 1994.
- [DJ94] D. L. Donoho and I. M. Johnstone. “Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage.” *Biometrika*, **81**(3) :425–455, 1994.
- [DM93] M. Duval-Destin and R. Murenzi. “Spatio-temporal wavelets : Applications to the analysis of moving patterns.” in *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Y. Meyer and S. Roques, eds., Editions Frontières, pp. 399–408, 1993.
- [DMM97] F. Damiani, A. Maggio, G. Micela, and S. Sciortino. “A Method Based on Wavelet Transforms for Source Detection in Photon-Counting Detector Images. I. Theory and General Properties.” *Astron. Journal*, **483** :350–369, July 1997.
- [Dok01] P.G. van Dokkum. “Cosmic-Ray Rejection by Laplacian Edge Detection.” *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **113** :1420–1427, 2001.
- [Don95] D. L. Donoho. “De-noising by Soft-Thresholding.” *IEEE Transactions on Information Theory*, **41**(3) :613–627, 1995.
- [Don98] D. L. Donoho. “Sparse Components of Images and Optimal Atomic Decomposition.” Technical report, Department of Statistics, Stanford University, December 1998.
- [DS52] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer. “A class of nonharmonic Fourier series.” *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** :341–366, 1952.
- [DV02] M.N. Do and M. Vetterli. “Contourlets : A directional multiresolution image representation.” In *in Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pp. 357–360, Rochester, September 2002.
- [EBB95] C. J. G. Evertsz, K. Berkner, and W. Berghorn. “A Local Multiscale Characterization of Edges applying the Wavelet Transform.” In *NATO ASI on Fractal Image Encoding and Analysis*, Trondheim, Norway, 1995.
- [EIT] EIT. “Site internet officiel du télescope EIT (Extreme-ultraviolet Image Telescope).” <http://umbra.nascom.nasa.gov/eit>.
- [FMZ03] W. Freeden, T. Maier, and S. Zimmermann. “A Survey on Wavelet Methods for (Geo)Applications.” *Revista Mathematica Complutense*, **16**(1), 2003.

- [GHR] K. M. Górski, E. Hivon, M. Reinecke, and A.J. Banday. “Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelisation of the sphere (HEALPix).” <http://www.eso.org/science/healpix/~>.
- [Gpl] “GNU General Public License.” <http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>.
- [GV64] I.M. Gelfand and N.Y. Vilenkin. *Generalized functions*, volume 4. Academic Press, 1964.
- [Har93] K.L. Harvey-Angle. *Magnetic Bipoles on the Sun*. PhD thesis, University of Utrecht, 1993.
- [HCV00] J.-F. Hochedez, F. Clette, E. Verwichte, D. Berghmans, and P. Cugnon. “Mid-Term Variations in the Extreme UV Corona : The EIT/SOHO Perspective.” In *Proc. 1<sup>st</sup> Solar & Space Weather Euroconference, "The Solar Cycle and Terrestrial Climate"*, Santa Cruz de Tenerife, Spain, 25-29 September 2000. (ESA SP\_463, December 2000).
- [HGJ03] J.-F. Hochedez, S. Gissot, L. Jacques, and J.-P. Antoine. “Multiscale Observations of the Solar Atmosphere.” In J.-P. Gazeau, R. Kerner, J.-P. Antoine, S. Metens, and J.-Y. Thibon, editors, *GROUP 24 : Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, pp. 931–935, Bristol, 2003. IOP Publishing.
- [Hip] The Hipparcos Space Astrometry Mission. See <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/>.
- [HJZ02] J.-F. Hochedez, L. Jacques, A.N. Zhukov, F. Clette, and J.-P. Antoine. “Small features in the EIT-SOHO images.” In *Proceedings of the SOHO-11 Conference : From Solar Min to Max : Half a Solar Cycle with SOHO*, ESA SP-508, 2002. in press.
- [Hol90] M. Holschneider. “Wavelet analysis on the circle.” *Journal of Mathematical Physics*, **31**(1) :39–44, 1990.
- [HT90] M. Holschneider and P. Tchamitchian. *Les ondelettes en 1989*, chapter Régularité Locale de la Fonction “Non-Différentiable” de Riemann, p. p. 102. Springer, Berlin, 1990.
- [HTJ03] P. Hagmann, J. Thiran, L. Jonasson, P. Vandergheynst, S. Clarke, P. Maeder, and R. Meuli. “DTI mapping of human brain connectivity : statistical fibre tracking and virtual dissection.” *Neuroimage*, **19**(3) :545–554, July 2003.
- [Hub88] D. H. Hubel. *Eye, Brain, and Vision*. Scientific American Library, New York, 1988.
- [Hub97] B. B. Hubbard. *The World According to Wavelets : The Story of a Mathematical Technique in the Making*. A K Peters Ltd, 1997.

- [Jaf91] S. Jaffard. “Pointwise Smoothness, Two-Microlocalization and Wavelet Coefficients.” *Publications Mathématiques*, **35** :155–168, 1991.
- [Jaf98] S. Jaffard. “Mathematical Tools for Multifractal Signal Processing.” In *NATO Advanced Study Institute on Signal Processing for Multimedia*, pp. 111–128, Lucca, Italy, 5-18 July 1998.
- [JS94] B. Jawerth and W. Sweldens. “An overview of wavelet based multiresolution analyses.” *SIAM Rev.*, **36**(3) :377–412, 1994.
- [Koe84] J. J. Koenderink. “The structure of images.” *Biol. Cybern.*, **50** :363–370, 1984.
- [KS96] A. Karasaridis and E. Simoncelli. “A Filter Design Technique for Steerable Pyramid Image Transforms.” In *Int’l Conf. Acoustics Speech and Signal Processing*, Atlanta GA, May 1996.
- [Lan56] C. Lanczos. *Applied Analysis*. Prentice Hall, 1956.
- [Lee96] T. S. Lee. “Image Representation Using 2D Gabor Wavelets.” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **18**(10) :959–971, 1996.
- [Len] “The Lenna Story.” <http://www.lenna.org>.
- [LM03] E. LePennec and S. Mallat. “Sparse Geometric Image Representation with Bandlets.” *submitted to IEEE Trans. on Image Processing*, 2003.
- [Lyn82] P. A. Lynn. *An introduction to the analysis and processing of signals*. Mac Millan, second edition, 1982.
- [Ma97] D. Moses and al. “EIT Observations of the Extreme Ultraviolet Sun.” *Solar Physics*, **175** :571–599, 1997.
- [Mal98] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press., 1998.
- [Mar82] D. Marr. *Vision*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA, USA, 1982.
- [MH92] S. G. Mallat and W. L. Hwang. “Singularity detection and processing with wavelets.” *IEEE Transactions on Information Theory*, **38**(2) :617–643, 1992.
- [MNP00] H. N. Mhaskar, F. J. Narcowich, J. Prestin, and J. D. Ward. “Polynomial frames on the sphere.” *Adv. Comput. Math.*, **13** :387–403, 2000.
- [NHK03] S. Nagata, H. Hara, R. Kano, et al. “Spatial and Temporal Properties of Hot and Cool Coronal Loops.” *Astron. Journal*, **590** :1095–1110, June 2003.
- [NW96] F. Narcowich and J. Ward. “Non-stationary wavelets on the m-sphere for scattered data.” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3** :324–336, 1996.

- [Pap86] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1986.
- [Phi92] K. J. H. Philips. *A Guide to the Sun*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [Pyc04] W. Pych. “A fast algorithm for cosmic-ray removal from single images.” *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **116** :148–153, February 2004.
- [Rad95] C. Radin. “Symmetry and tilings.” *Notices Notices American Mathematical Society*, **42** :26–31, 1995.
- [SCD02] J. L. Starck, E. Candès, and D. L. Donoho. “The Curvelet Transform for Image Denoising.” *IEEE Transactions on Image Processing*, **11**, **6** :670–684, 2002.
- [Sch98] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1998.
- [SFA92] E. P. Simoncelli, W. T. Freeman, E. H. Adelson, and D. J. Heeger. “Shiftable Multi-scale Transforms.” *IEEE Transactions on Information Theory*, **38**(3) :587–607, March 1992.
- [SK] D. Rockmore S. Moore, D. Healy and P. Kostelec. “SpharmonicKit is a freely available collection of C programs for doing Legendre and scalar spherical transforms developed at Dartmouth College. It is available at <http://www.cs.dartmouth.edu/~geelong/sphere/>.”
- [SS95] P. Schröder and W. Sweldens. “Spherical Wavelets : Efficiently representing functions on the sphere.” *Computer Graphics Proceedings*, pp. 161–172, 1995.
- [Tas00] C. Taswell. “The What, How, and Why of Wavelet Shrinkage Denoising.” *IEEE Computing in Science and Engineering*, pp. 12–19, May/June 2000.
- [Tor95] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. Savoirs actuels, InterEdition/CNRS edition, 1995.
- [UA92] M. Unser and A. Aldroubi. “Spline Multiresolutions and Wavelet Transforms.” In *Proceedings of the 1992 IEEE Signal Processing Society International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis (IEEE-SP'92)*, pp. 315–318, Victoria BC, Canada, October 4-6 1992.
- [UAE93] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. “B-Spline Signal Processing : Part I—Theory.” *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**(2) :821–833, February 1993.
- [UDM04] I. Ugarte-Urra, J. G. Doyle, M. S. Madjarska, and E. O’Shea. “Signature of oscillations in coronal bright points.” *Astronomy & Astrophysics*, 2004. to appear.
- [Van98] P. Vandergheynst. *Ondelettes directionnelles et ondelettes sur la sphère*. thèse, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, Septembre 1998.

- [VBW03] B. Vrsnak, R. Brajsa, H. Wöhl, V. Ruzdjak<sup>1</sup>, F. Clette, and J.-F. Hochedez. “Properties of the solar velocity field indicated by motions of coronal bright points.” *A&A*, **404** :1117–1127, 2003.
- [VF01] P. Vandergheynst and P. Frossard. “Efficient image representation by anisotropic refinement in matching pursuit.” In *in Proceedings of IEEE ICASSP*, volume 3, Salt Lake City UT, May 2001.
- [VG02] P. Vandergheynst and J.-F. Gobbers. “Directional wavelet frames : Design and algorithms.” *IEEE Transactions on Signal Processing*, **11** :363–372, 2002.
- [Vil69] N. J. Vilenkine. *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*. Dunod, 1969.
- [Wic94] M. V. Wickerhauser. “Smooth Localized Orthonormal Bases.” In Alfred Z. Msezane and Katrina L. Barnum, editors, *Proceedings of the Sixth Annual Conference of the National Alliance of Research Centers of Excellence*, pp. 160–173, Clark Atlanta University, Atlanta, Georgia 30314, 17–19 March 1994. The Center for Theoretical Studies of Physical Systems.
- [Yaw] A. Coron, L. Jacques, A. Rivoldini, and P. Vandergheynst. “The YAWtb toolbox (Yet Another Wavelet toolbox).” <http://www.fyma.ucl.ac.be/projects/yawtb> .
- [Zha95] C.Y. Zhang. “Robust Estimation and Image Combining.” In *In Proceedings of the Astronomical Data Analysis Software and Systems Meeting No. 4*, pp. 514–517, Baltimore, Maryland, September 25-28, 1994 1995.
- [ZKW01] J. Zhang, M.R. Kundu, and S.M. White. “Spatial Distribution and Temporal Evolution of Coronal Bright Points.” *Solar Physics*, **198** :347–365, 2001.